# 表計算ソフトを用いた初等函数の有限区間定積分の求め方

## ― 正規分布・マックスウェル－ボルツマン分布・異なる径のクロス管の体積 ―

髙　見　知　秀＊[1]

# Estimation of the finite interval definite integral of an elementary function using spreadsheet software

## —for normal distribution, Maxwell-Boltzmann distribution, and the estimation of the volume of cross tubes with different diameters—

TAKAMI Tomohide*


### 抄録和訳

ガウス函数による正規分布、その期待値によるマックスウェル - ボルツマン分布・楕円函数を用いた異なる径のクロス管の体積の算出など初等函数の定積分を求めることは、大学の工学初等教育において必要な修得技能となっている。しかしこれらの初等函数の有限区間における定積分を解析的に求めるには、これらの函数の不定積分を求めることになるが、これは Liouville の定理により否定される。そこで本論文では、大学初年度の学生が表計算ソフトを用いてこれらの積分値を求めるための方法について示す。

### Abstract

Calculating the definite integrals of elementary functions, such as the normal distribution by the Gauss function, the Maxwell-Boltzmann distribution by its expectation value, and the volume of cross tubes of different diameters by using the elliptic function, is a necessary skill to be acquired in elementary engineering education at universities. In order to obtain analytically the definite integrals of these elementary functions on finite intervals, indefinite integrals of these functions should be obtained, however, which is denied by Liouville's theorem. In this paper, the method for students in the first year of universities to estimate these integrals numerically by using spreadsheet software is described.


**Keywords**: finite interval definite integral, spreadsheet software, normal distribution, Maxwell-Boltzmann distribution, elliptic function

＊[1]　工学院大学教育推進機構基礎・教養科教授
2020年度学習支援センター所長代理

## 1. 背景

大学の初年次教育では、統計では正規分布の区間面積、初歩の物理化学と統計力学では気体の速さのマックスウェル－ボルツマン分布（註：速度「成分」の分布は正規分布であるが、「速さ」の分布は各速度成分の分布に速度の 2 乗を掛けた期待値の分布になることに注意されたい）の区間比率、そして工学では幾何学的に様々な形状の物体の体積を求める、これらの計算が必要とされる。

高校数学において、積分によって分布の面積または立体の体積を求めることが出来ることは学んでいる。一方、現在の高校数学では修得範囲外ではあるが、以下の各章に示すように、特殊な場合において前記の分布函数の積分値は解析的に求めることができる。しかし、一般にこれらの積分値を近似ではなく正確つまり解析的に求めるには、それらの函数の不定積分を求めることになる。放物線に代表される二次函数などの初等函数では任意の有限区間での定積分は求められる。しかし、全ての初等函数においてこれらの有限区間での定積分が解析的に計算できるわけではないことは、高校数学では教えられていない。このため、もし学生がこれらの積分値を求めるために積分を解析的に計算しようとすると、求められないことを知らないため「迷宮入り」となる。

そこで本論文ではまず、初等函数に関する Liouville の定理を示して、ガウス函数や楕円函数は有限区間での定積分を解析的に求めることが出来ないことを示す。次に、正規分布、マックスウェル－ボルツマン分布、そして楕円函数を用いた体積の算出について、特殊な場合については解析的に計算できることを示す。そして、このように解析的に求められない積分については、表計算ソフトを用いれば近似解が得られることを、具体例を挙げて示す。

## 2. Liouville の定理

初等函数に関する Liouville の研究は、黒河によって示されている。[1] この Liouville の定理は一般に次のように書ける。

$f(x)$ の不定積分が初等函数で示せるためには、複素定数 $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$ と有理函数 $g_1(x), \cdots, g_n(x), h(x)$ が存在して、

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{g_j{}'(x)}{g_j(x)} + h'(x)$$

と書けることが必要十分条件である。

上記の定理をガウス函数のような場合に特化した上で平易にすると、次に示す Liouville 判別法がある。[2]

有理函数 $f(x)$, $g(x)$ について $f(x)\,e^{g(x)}$ の不定積分が初等函数で示せるためには、ある有理函数 $h(x)$ が存在して、

$$f(x) = h'(x) + h(x)g'(x)$$

と書けることが必要十分条件である。

この Liouville 判定法を用いると、下記のようにして $e^{-x^2}$ の不定積分が初等函数で書けないことが背理法を用いて証明できる。

まず、Liouville 判定法を満たす有理函数 $h(x)$ があったとし、互いに素な多項式 $p(x)$, $q(x)$ を用いて

$$h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

と書けたとする。Liouville 判定法より

$$1 = h'(x) - 2h(x)x$$

なので、

$$q(x)\{q(x) + 2p(x)x - p'(x)\} = -q'(x)p(x)$$

となる。よって $q'(x)p(x)$ は $q(x)$ で割り切れる。$p(x)$ と $q(x)$ は互いに素なので、$q'(x)$ は $q(x)$ で割り切れる。すると $q(x)$ は定数であり、$h(x)$ は多項式となる。

ここで、$1 = h'(x) - 2h(x)x$ を考えると、左辺は 0 次の多項式であるが、右辺は $h(x) \neq 0$ である限り 1 次以上の多項式となるので矛盾する。また、$h(x) = 0$ でも矛盾する。

つまり、Liouville 判定法を満たす有理関数 $h(x)$ は存在しない。こうして、$e^{-x^2}$ の不定積分が初等函数で書けないことが証明された。

このように、正規分布で用いられるガウス函数の不定積分は求められないことが、Liouville の定理から示されている。[3) ] 同様にして、楕円函数の不定積分は求められないことも黒河によって示されている。[4)] また、この章と同様な記述は他の書籍にもあるので参照されたい。[5)]

## 3. 正規分布の定積分

前章で示したように、ガウス函数の有限区間での定積分は、解析的には求められない。しかし、下記に示す条件においては定積分の計算はできる。ここでは、初学者が誤解しないようにするために、定積分が計算できる場合について、その事例を示す。

積分範囲が無限大、つまり $-\infty$ から $\infty$ の場合は、求める積分値の 2 乗について極座標 ($x = r\sin\theta, y = r\cos\theta$) と重積分、そして総和（シグマ）の二重和が分解できる「フビニの定理」

$$\int A \int B = \iint AB$$

を用いると下記のように計算できる。そこで

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$$

で与えられる積分（これをガウス積分という）$I$ について、変数 $x$ を $y$ に変えた積分との積を $I^2$ とすると、

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

（∵フビニの定理）

ここで極座標 ($x = r\sin\theta, y = r\cos\theta$) に変換するとヤコビアンは $r$ なので $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$ となり、

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_0^{\infty} \\ &= \pi \end{aligned}$$

となるので $I = \sqrt{\pi}$ と求められる。なお、ヤコビアンの詳細については大学での解析学の講義に委ねるが、図 1 に示したように平面上において $r$ から $r + \mathrm{d}r$ の間にある部分の面積が

$2\pi r\,\mathrm{d}r$ と近似できることに由来する。上記の積分では、全平面上で積分する際に $r$ を固定して $\theta$ で積分し、最後に $r$ で積分している。

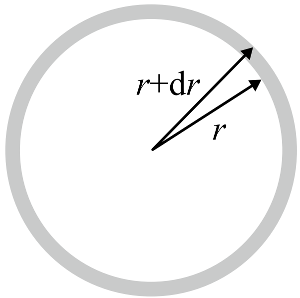


**図１ 平面デカルト座標** $(x, y)$ **から極座標** $(r, \theta)$ **に変換したときの積分範囲の模式図**

また、上記の積分で、0 から∞での積分の場合には半分の値となる。すなわち

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となる。以上の定積分が解析的に求められる例となる。

しかし、一般的に上記以外の定積分を解析的に求めることはできない。例えば高校数学において、標準偏差 $\pm\sigma$ の範囲はおよそ 68% であることは教えられているが、この値は解析的に求めることはできない。そこでここでは、Microsoft 社の Excel を用いて正規分布のグラフを描き、標準偏差の値を求めた例を示す。

平均値 $\mu$ で標準偏差 $\sigma$ の正規分布は次式から求められる。

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

これを Excel に入力する式にすると次のようになる。

```
=1/(SQRT(2*PI())*$I$1)*EXP(-1*((A1-$O$1)^2)/
(2*$I$1^2))
```

ここでは、A 列「A1」に $x$ の値を入力するようにして、平均値 $\mu$ をセル「$O$1」に、標準偏差 $\sigma$ をセル「$I$1」に入力している。なお、Excel で計算する場合にセルをドラッグ＆ドロップで入力するには、このように記号「$」を用いていれば、参照先は固定化されるので憶えておくとよい。また、この式において

```
=1/(SQRT(2*PI())*$I$1)*EXP(-(A1-$O$1)^2/
(2*$I$1^2))
```

として「^2」の「^」がどこまでの範囲なのかを括弧を用いて明確にしないと、Excel 側が忖度して計算することがあり、ここに示した場合では Excel 側が「^2/(2*$I$1^2)」と判断して誤った計算結果となる。なお、上記の場合において

```
=1/(SQRT(2*PI())*$I$1)*EXP(-1*(A1-$O$1)^2/
(2*$I$1^2))
```

と代入すると、Excel 側が忖度して正しい計算結果になることも確認している。このような「( )」の忘れは Excel の初学者で起こしやすいミスなので注意されたい。

上記の入力式を用いて、具体例として百点満点のテストの結果が正規分布になると想定して Excel でグラフを描かせると、図 2 のようになった。

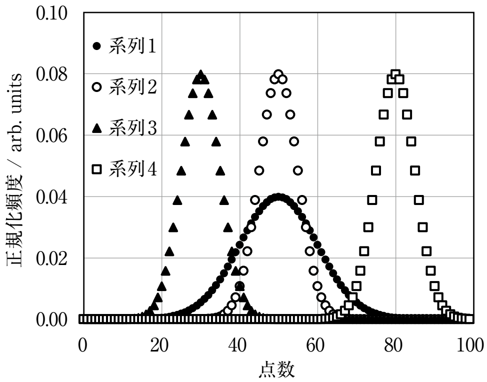


**図 2　Excel を用いて描いた正規分布のグラフ**
●系列 1：平均値 50 標準偏差 10
○系列 2：平均値 50 標準偏差 5
▲系列 3：平均値 30 標準偏差 5
□系列 4：平均値 80 標準偏差 5

実際の Excel での表計算では、0 から 100 まで 1 点刻みで行った。この 1 点刻みで台形公式を用いて、図 1 の●系列 1 に示した正規分布で ± σ の範囲での積分の近似値

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-x^2}\mathrm{d}x \cong \sum_{i=40}^{60} e^{-(i-50)^2/(2\times 10^2)}$$

を求めると、68.2286% と求められた。より精密な値は 68.2689492% であり、1 点刻み程度の粗い近似計算でも有効数字 2 桁までは合う計算結果となることがわかった。なお、± 2 σの範囲での積分の近似値を同様にして求めると 95.432% と求められ、より精密な値 95.4499736% と比較して有効数字 3 桁までは合う計算結果が得られた。

## 4. マックスウェル－ボルツマン分布の定積分

物理化学そして統計力学において初学者が学ぶ気体分子運動論で習うマックスウェル－ボルツマン分布において、気体分子の速さが $v$ から $v$+d$v$ の間にある割合が $f(v)\mathrm{d}v$ となるときの分布は、次に示す式で表される。[6)]

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT}$$

ここで $M$ は気体分子 1 mol あたりの質量 [kg/mol]（註：初学者の多くは分子量と混同して 1000 分の 1 の数値を代入するので注意されたい）、$R$ は気体定数 8.31446261815324 [J K$^{-1}$ mol$^{-1}$]（註：、2019 年 5 月 20 日に発効した SI 基本単位の再定義によって、アボガドロ定数とボルツマン定数は定義定数となったので、ここに示した数値が正確な気体定数である）、$T$ は絶対温度 [K] である。

アトキンスの教科書の統合問題[6)]では、速さが 100 m s$^{-1}$ と 200 m s$^{-1}$ の間にある分子の割合を数値計算によって求める問題が出題されている。当然この問題は数学ソフトウェア、表計算ソフトウェアを利用するように指示されている。もしこの問題で、$v^2e^{-Mv^2/2RT}$ を $v$ と $ve^{-Mv^2/2RT}$ に分けて部分積分をすると、

$$F(T) = \left[\frac{-1}{\sqrt{\pi}}\frac{M}{RT}ve^{-Mv^2/2RT}\right]_{100}^{200} + \int_{100}^{200}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{M}{RT}e^{-Mv^2/2RT}\mathrm{d}v$$

となり、第 1 項は計算できるが、第 2 項は第 3 章で示したガウス函数の有限区間定積分であり、Liouville の定理により解析的な計算は不可能である。このガウス関数は第 3 章でも示したように－∞から∞の範囲の定積分ならば極座標変換で求める方法がある。しかしこの場合は 100 から 200 の直方領域を極座標の帯状の領域に変換することになり、極座標変換しても計算はできない。なお、誤差函数を使うと計算できるが、この場合も解析的ではなく数値積分の計算となる。

マックスウェル－ボルツマン分布の式をExcel のセルに代入するには、次のような式を用いればよい。

```
=4*PI()*SQRT(($I$1*0.001/(2*PI()*8.31446261815324
*$P$1))^3)*A1*A1*EXP(-1*$I$3*0.001*A1*A1/
(2*8.31446261815324*$P$1))
```

ここでは、A 列「A1」に速さ $v$ の値を入力するようにして、分子量（SI 単位系でのモル質量 $M$ の 1000 分の 1 の値）をセル「$I$1」に、絶対温度 [K] をセル「$P$1」に入力している。また、第 3 章で示した、「^」の範囲を括弧で指示を忘れる、というミスへの対策法としてこのように「A1^2」を「A1*A1」として「^」を用いないやり方もある。

この入力式を用いて、速さ $v$ が 0 から 1000 m s$^{-1}$ までの範囲でのマックスウェル－ボルツマン分布を Excel でグラフに描かせると、図 3 のようになった。

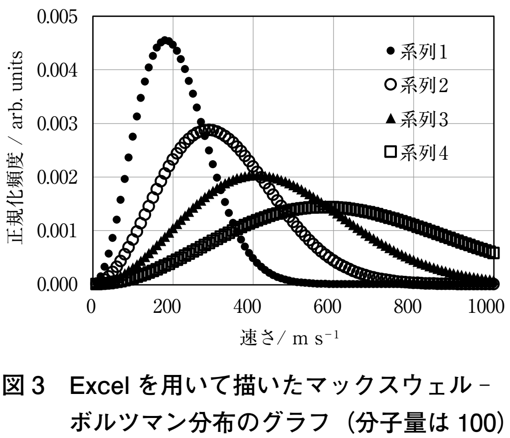


**図 3　Excel を用いて描いたマックスウェル－ボルツマン分布のグラフ（分子量は 100）絶対温度**
●系列 1：200 K,　○系列 2：500 K,
▲系列 3：1000 K, □系列 4：2000 K

そして、速さが 100 m s$^{-1}$ と 200 m s$^{-1}$ の間にある分子の割合を数値計算によって求める問題[5] について、Excel で 100 から 200 まで 10 刻みで台形公式を用いて計算を行ったところ、300 K では 0.28133、1000 K では 0.06629 と求められた。出版されているアトキンス教科書解答集（英語版）[7] をみるとそれぞれ、0.281 と 0.066 となっているので、10 刻みというおおらかな計算でも十分妥当な結果を得ることができた。

## 4. 異なる径のクロス管の体積の計算

例えば真空工学において、次のような問題が考えられる「内径 23 mm 長さ 100 mm のパイプと、内径 17.5 mm 長さ 100 mm のパイプが十字にクロスした管の内容積を求めよ」。

このクロスするパイプの径が同じ半径 $r$ の場合であれば、高校数学で習った積分で計算できる。この円筒が重なった部分の体積を求めるのは、受験数学において頻出の問題であり、筆者は受験生のときは答の $16r^3/3$ は暗記していた。その導出方法は次のようになる。

2 つの直交している円柱の式をそれぞれ $x^2 + z^2 \leqq r^2$, $y^2 + z^2 \leqq r^2$ とする。$z = t$ のときの切り口は $\left(\pm\sqrt{r^2-t^2},\ \pm\sqrt{r^2-t^2}\right)$（複号任意）の 4 つの点を頂点とする正方形で、その一辺の長さは $2\sqrt{r^2-t^2}$ であるから断面積は $4(r^2-t^2)$ である。よって求める体積は

$$\int_{-r}^{r} 4(r^2-t^2)\,\mathrm{d}t = 4\left[r^2t-\frac{t^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \frac{16}{3}r^3$$

である。

しかし与えられた問題のように、パイプの径が異なる場合には、楕円積分を計算することになる。この楕円積分が解析的に求められないのは、第 2 章で示した。そこで、これまでと同様に Excel を用いて計算した結果を示す。

この章の最初に与えた問題を一般化すると次のようになる。「半径 $a$ 長さ $2L$ の円筒と半径 $b$ 長さ $2L$ のパイプが十字にクロスした管の内容積を求めよ」。

2 つの直交している円柱の式をそれぞれ $x^2 + z^2 \leqq a^2$,（$-L \leqq x \leqq L$）, $y^2 + z^2 \leqq b^2$（$-L \leqq y \leqq L$）、但し $0 < a < b < L$ とする。$z = t$ の場合で 2 つのパイプの交点は
$(\pm\sqrt{a^2 - t^2}, \pm\sqrt{b^2 - t^2})$（複号任意）の 4 点となる。
ここで $x > 0$, $y > 0$ の範囲の断面を図 4 に示す。

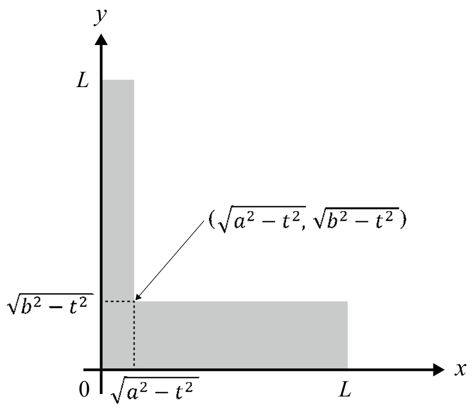


**図 4**

異なる半径 $a$, $b$ の円筒 $x^2 + z^2 \leqq a^2$, $(-L \leqq x \leqq L)$ および $y^2 + z^2 \leqq b^2$ $(-L \leqq y \leqq L)$,（但し $0 < a < b < L$）の、$z = t$ における第一象限 $(x > 0, y > 0)$ での断面図

図 4 より、この断面の面積 $S_1(t)$ は
$L\sqrt{a^2 - t^2} + L\sqrt{b^2 - t^2} - \sqrt{a^2 - t^2}\sqrt{b^2 - t^2}$
$(0 < t < a)$ となる。また、交わっていない部分の断面積 $S_2(t)$ は $L\sqrt{b^2 - t^2}$ $(a < t < b)$
となる。

実際の Excel での表計算では、0 から $b = 23/2$（$=11.5$）mm まで 0.25 mm 刻みで各 $z = t$ における断面積を計算した。この 0.25 mm 刻みで台形公式を用いて、次に示す積分近似値

$$\int_0^a S_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b S_2(t)\,\mathrm{d}t \cong \sum_{i=0}^{a} S_1(i) + \sum_{i=a}^{b} S_2(i)$$

を求めると、7552.25 mm$^3$ と求められた。よって求める体積はこの 2 × 4 倍なので 60418 mm$^3$ と求められた。クロスさせる前の内径 23 mm（半径 11.5 mm）長さ 100 mm のパイプの体積は 41547 mm$^3$、内径 17.5 mm（半径 8.75 mm）長さ 100 mm のパイプの体積は 24053 mm$^3$ なので、重なり部分の体積は 41547+24053−60418 = 5182 mm$^3$ と求められた。

## 5. おわりに

工学者は、理想的には解決できない問題でも現実的に解決しなければならない。本論文では、積分が解析的に計算できない場合でも、表計算ソフトウェアを用いれば、工学的には問題なく実用的に解決できる例として、正規分布、マックスウェル－ボルツマン分布、そして異なる径のパイプのクロス管の体積を Excel で数値解を求める方法を示した。初学者のために、台形公式を用いておおらかな区間刻みでの計算を示したが、より精密な計算については他の講義や書籍[5)]に委ねたい。

## 6. 謝辞

第 2 章での議論で、参考文献 1 を紹介してくださった基礎・教養科数学の長谷川研二先生に感謝いたします。 また、第 3 章での Excel での計算式入力ミスの記述については基礎・教養科化学の徳永 健先生との議論が役立ちました。

**参考文献**


1. 黒河龍三：初等函數に關するリウギユ(Liouville) の研究（其一），日本数学物理学会誌 , 1, 17-27 (1927).
2. 渡辺隼郎：有限項で不定積分と微分方程式の解を表す ―歴史と現状―，情報処理 , 27, 396-403 (1986).
3. 黒河龍三：初等函數に關するリウギユ(Liouville) の研究（其二），日本数学物理学会誌 , 1, 146-155 (1927).
4. 黒河龍三：初等函數に關するリウギユ(Liouville) の研究（其三），日本数学物理学会誌 , 3, 8-18 (1929).
5. 一松信：初等関数の数値計算 第 1 版 , 教育出版 , 1974, pp.192-209.
6. P. Atkins and J. de Paula 著 , 中野元裕 , 上田貴洋 , 奥村光隆 , 北河康隆 訳：アトキンス 物理化学（上）第 10 版 , 東京化学同人 , 2017, p. 26, 39.
7. C. Trapp, M. Cady, and C. Giunta：アトキンス 物理化学 問題の解き方（学生版）第 10 版 英語版 , 東京化学同人 , 2017, pp. 13-14.


（たかみ　ともひで　教育推進機構基礎・教養科教授）