ディリクレ級数環の代数的考察(Ⅰ)

中　沢　英　昭

(本文中(i),(ii)等の引用は末尾の参考文献引用を示す。)

(通常)ディリクレ級数とは、

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$$

の形の級数である。ここに s は複素変数、a_n は複素係数とする。これはラプラス変換

$$\mathrm{L}\{\mathrm{F}(t)\}=f(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}\mathrm{F}(t)dt$$

を、連続的から離散的に焼き直したものと考えられる。元来これは P.G.L. Dirichlet により算術級数中に(初項と公差が互に素な正整数であるとき)素数が無数に存在するという定理を証明するため(1839)、導入されたディリクレのL級数と今日呼ばれるものの一般化である。

また特に $a_n=1$ $(n=1,\ 2,\cdots\cdots)$ とすれば、これはリーマンのゼータ函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$$

となる。これは(i)において、素数の分布の状態を考察するために複素変数の解析函数としてリイマンが導入(1859)したものである。

この種の函数の解析的性質を調べるに当っては、アンドレ・ヴェイユの国際数学会議(テーマは数論、於東京)の際の一般講演(1955、東京大学に於いて)によれば(iii)、次の三つが基本的である。

第1。いわゆるリイマン予想。これは $\varphi(s)=0$ の(自明でない)根(すなわち $\varphi(s)$ の零点)が、$\mathrm{R}_e s=\frac{1}{2}$ 上にのみあるかどうかということ。

第2。函数等式。$\mathrm{R}_e s=\frac{1}{2}$ に関する折り返し $s\to1-s$ に対し、$\varphi(s)$ に適当な s の函数を掛けたものが不変になるかどうか。

第3。オイラー積(一種の無限積表示)をもつかどうか。

本稿では、こういう解析的な(面倒な)ことには触れずにディリクレ級数を多元環と

して抽象代数的に取扱ってみようというのが主題である。ちょうど可換環Rの上の多項式環 R〔X_1, ……, X_n〕 あるいは形式的巾級数環 R〔〔X_1, ……, X_n〕〕 の考察が、体の拡大の理論、イデアル論、代数多様体の理論等へと導くように、扱い方によっては面白い結果が得られるのではなかろうか。然し本稿においては、表面的な考察、既知の結果の追認、単なる数値計算等に止まらざるを得ないのは筆者の遺憾とする所である。

以下では、抽象代数学の用語、概念を用いるが、それらについては (ii) など標準的な文献を参照されたい。

一変数の多項式 $F(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, あるいは（形式的）巾級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ の全体は、$\{X^k\}(k=0, 1, \cdots\cdots)$ を底とする（無限次の）（多元）環（algebra）と考えられる。ただし $\{a_k\}$ $(k=0, 1, \cdots\cdots)$ はある可換環Rの元であるが、さしあたっては R＝C（複素数体）としておく。また前者（多項式環）は、後者（巾級数環）において、有限個を除いて成分がすべて0であるという条件を付け加えて得られる部分環である。

Fをベクトルと考え、

$$F \longleftrightarrow (a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots)$$
$$G \longleftrightarrow (b_0, b_1, b_2, \cdots\cdots)$$
$$FG \longleftrightarrow (c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots)$$

とすれば、$c_n=\sum_{i+j=n} a_i b_j$ となる。この掛算の規則により、Fをあらわす行列は（多元環の表現論、(ii) のⅡ、第14章参照)、

$$F \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots\cdots \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0\cdots\cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0\cdots\cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0\cdots\cdots \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0\cdots\cdots \end{pmatrix}$$

となる。これは周知の事実である。

ディリクレ級数環の場合には、上の場合と全く同様に、

$$\mathrm{F} \longleftrightarrow (a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots)$$

$$\mathrm{G} \longleftrightarrow (b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots)$$

$$\mathrm{FG} \longleftrightarrow (c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots)$$

とすれば、$c_n = \sum_{ij=n} a_i b_j$ となる。このときFの、$\{n^{-s}\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ を底とする、行列による表現は、

$$\mathrm{F} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots \\ a_3 & 0 & a_1 & 0 & 0 \cdots\cdots \\ a_4 & a_2 & 0 & a_1 & 0 \cdots\cdots \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & a_1 \cdots\cdots \\ a_6 & a_3 & a_2 & 0 & 0 \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

となる。

以上は、多項式の場合 $\mathrm{F} \longleftrightarrow (\lambda_{ij})$、ディリクレ多項式（または級数）のとき$\mathrm{F} \longleftrightarrow (\mu_{ij})$ とすれば、

$$\begin{cases} \lambda_{ij} = a_{i-j} \ (i \geq j \text{ のとき}) \\ \quad = 0 \quad (i < j \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_{ij} = a_{\frac{i}{j}} \quad (j \mid i \text{ のとき}) \\ \quad = 0 \quad (j \nmid i \text{ のとき}) \end{cases}$$

と書ける。

巾級数のときは n が0から、ディリクレ級数のときは n が1から始まっているのは、0, 1がそれぞれ加法、乗法の単位元となっているからである。

もっとも、（本稿では深入りしないが）ディリクレ級数 $\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ には、Mellin 変換または Hecke の作用素により巾級数

$$f(q) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$$

が対応する。ここで $\varphi(s)$ が signature (λ, K, μ) に対応するとき、

$$a_0 = \mu \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{-K} \Gamma(K) \rho$$

となる。ただし

$\rho=\varphi(s)$ の $s=K$ における留数

である。

以上のことについては (iv) または (v) を参照されたい。

さて、以上のように（解析的な函数としての意味を離れて)、ある可換環の上の（例えば複素数体Cの上の）無限次多元環としての形式的ディリクレ級数環、その subalgebra としてのディリクレ多項式環を構成した訳であるが、これらは共に整域ではあるが体ではない。（係数環が体または整域のとき。）

また前者（ディリクレ級数環）のみについていえば、次のようなことが直ちにわかる。

乗法についての単位元$=(1, 0, 0, \cdots\cdots)$

$(a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots)$ が単元（逆元をもつ元）であるための必要十分条件は、a_1 が単元であること。

係数環をCとすれば（一般に、標数0の代数閉体とすれば)、 Fが単元のとき、方程式 $x^n=\mathrm{F}$ は必ず級数環の中で解をもつ。

さて、環の取扱いの常套手段である、商環（quotient algebra）と剰余環（residue class algebra）の構成と性質の探究は、いかになさるべきであるか。また係数環の (modulo Pでの) reduction によってはどうなるのか。多項式環の場合に得られる豊富な結果（(ii) のⅠを見よ）にくらべ、果して一見予想されるような trivial な諸結果のみしか得られないのであろうか。筆者の非力と不勉強のため、現在の所これらは構想の域を出ないのである。（例えば、$(1, 1, 1, \cdots\cdots)=\zeta(s)$ によって生成される単項イデアルによる剰余環を考えて見たいのだが。これは $\zeta(s)=0$ の根を、いろいろな

ディリクレ級数に代入することに対応する。)

最後に、計算例を列挙する。これらは、(最後のものを除いて)解析数論の教科書に級数の形で載っているものである。(例えば(vi)または(vii)を見よ。)

$$\mathrm{F} \longleftrightarrow (1,\ 1,\ 1, \cdots\cdots) = (1)$$
$$\mathrm{G} \longleftrightarrow (1,\ 2,\ 3, \cdots\cdots) = (n)$$
$$\mathrm{H} \longleftrightarrow (1, -2,\ 0,\ 0,\ 0, \cdots\cdots)$$

とするとき、

$$\mathrm{F}^2 \longleftrightarrow (1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 4, \cdots\cdots) = (d(n))$$
$$\mathrm{FG} \longleftrightarrow (1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 6,\ 12, \cdots\cdots) = (s(n))$$
$$\mathrm{F}^{-1} \longleftrightarrow (1, -1, -1, 0, -1, 1, \cdots\cdots) = (\mu(n))$$
$$\mathrm{F}^{-1}\mathrm{G} \longleftrightarrow (1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 2,\ 6, \cdots\cdots) = (\varphi(n))$$
$$\mathrm{FH} \longleftrightarrow (1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1, -1, \cdots\cdots) = ((-1)^{n-1})$$
$$\sqrt{\mathrm{F}} \longleftrightarrow \pm\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{16}, \cdots\cdots\right)$$

ここで、$d(n)$ は n の(正の)約数の個数を示す。$s(n)$ は n の(正の)約数の総和を示す。

また $\mu(n)$ はいわゆるメービウス(Möbius)の函数で、n がある素数の平方で割り切れるとき $\mu(n)=0$, またそうでないとき n が k 個の相異なる素数の積に等しいならば $\mu(n)=(-1)^k$ と定義される。また $\varphi(n)$ はオイラー(Euler)の函数で、mod. n の剰余環において、単元(逆元をもつ元)の作る乗法群の位数である。

$d(n)=2 \quad \Longleftrightarrow n$ が素数

$s(n)=2n \quad \Longleftrightarrow n$ が完全数

$d(n)\equiv 1 (\mathrm{mod.}\ 2) \Longleftrightarrow n$ が平方数

1の原始 n 乗根は $\varphi(n)$ 個存在する

等は初等整数論においてよく知られた事実である。ここで$\sqrt{\mathrm{F}}$に対応する数列は、nの素因数分解の型によってのみきまる数列で、(trivial なものかも知れないが) 新しい整数論的函数であるように (今の所) 思われる。

なお、これは周知のことなのであろうが、F^{-1} を表現する行列の列についての和をとることにより、次のような (演習問題程度の) 公式が得られることに注意しておく。

$\sum_{k=1}^{n}\mu(k)=\mathrm{A}(n)$　とすれば、

$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right)=1$ が成立つ。($[x]$ は x の整数部分を表わすガウスの記号)

これは、$\mu(n)=+1$ と $\mu(n)=-1$ とが均等に入り雑っている状態を表わしていると解釈できよう。

なお、本考察にもとづいて電子計算機を利用すれば、(エラトステネスの篩の方法でなく) 素数の表や $d(n)$, $s(n)$, $\mu(n)$, $\varphi(n)$ の表が (計算機の capacity と時間、費用さえ許せば) 原理上はいくらでも計算できることを附言しておこう。実は本研究は Fortran H によってそれらの表を作製するプログラムを案出するプロセスをまとめたものでしか、今の所はない。なおプログラムは既に完成し、計算も行ってみたが、本学の計算機の capacity では私のプログラムにより一度に計算できるのは $n=1000$ くらいまでなので、実用的ではないことがわかった。

文献 (viii) には未解決の問題が載っているが、いずれも極めて困難に思える。

最後に、怠惰な私に論文執筆をうながし、絶えず激励して下さった天草、故武田、宮本、松尾、加藤 (昭) 諸先生、並びに奥野先生を初めとする電子計算機センターの諸氏に深く感謝する次第である。

参 考 文 献

(i) Bernhard Riemann.: Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse (1859) 〔Gesammelte Werke. S. 145—155〕

(ii) van der Waerden.: Algebra. I, II. 7te Auflage (1966) Springer Verlag.

(iii) André Weil: ゼータ函数の育成. 雑誌「数学」(1955か56)〔講演要旨〕岩波書店

(iv) Erich Hecke: Dirichlet Series, Modular Functions and Quadratic Forms (1938) 〔Lecture Note, Princeton University〕

(v) 日本数学会編：数学辞典 (第2版、1968)〔ZETA 函数の項、p. 834—846〕岩波書店

(vi)　末綱恕一：解析的整数論（1950）岩波書店

(vii)　高木貞治：初等整数論講義（1931）共立出版株式会社

(viii)　S. Chowla: The Riemann Hypothesis and Hilbert's 10th Problem (1965) Science Publishers, Inc.

（本学講師・数学）