

# 本学における数学教育についての一考察

栗 原 芳 三

## 序 文

本学機械科での数学をどのように教育すべきかどのようにしたらよい効果をあげることができるか、ということについて長い間苦心してきた。このことに関していささかのべてみたいと思う。

数学専攻を目的としない学生を対象とする数学教育の目標の一つは、学生をして、如何に理解をさせるか、如何に興味をもたせるか、そして如何に工学上の種々の実験から出てくる現象および自然現象の〔式化〕計算→〔結論〕への応用能力をつけることが出来るかにつきて思われる。

数学教育において、多くの学生から感じとれる傾向としては、先ず定理を完全に理解してから、これに関連する問題を解決するということではなく定理の不完全な理解の上に立って問題を解決している中に、その定理の内容を理解すること。

いうなれば、ある条件のもとでは、個々の問題に共通の事項が一つの定理であり、そしてこの共通事項が大きく広げれば大きな定理であることを無意識の中の意識としていることである。したがって数学を理解させる一方法としては、つぎの方法がよいと思う。

- (i) その定理が難解と思われるときは、理屈抜きで学生に使用させ、その定理の大意をつかませることにより飛躍感を持たせず次の定理へと進展させていくこと。
- (ii) 数学的に工学上の色々な問題と結びつけながら、その定理が出現した必然性を示すこと。

これらにより効果的な結果が得られるものと思われる。この「効果的な結果」をあげるには、教材も大きな要素であって、良い教材と思われる書物の共通点としては

- (i) 例題が抽象的でなく、種類が豊富なこと。
- (ii) 参考図が多く思考順序が示されていること。

(iii) 定理と工学現象、及び工学現象と問題との具体的な関連づけがなされていること。

が見受けられる。書物のはしがきに「……本書を読むにあたっての予備知識としては、大学初年級の微積分の知識があれば十分……」とあるのを、よく見掛るが、そうはいうものの、内容が抽象的で、学習にあたって理解するのが困難であるので、このはしがきが基礎事項についてはだいたい理解してきたと思っている多くの学生に挫折感を与える言葉となることが多い。このような書物は出来るだけ避けたいものである。そして数学の学習は

(i) 帰納的思考

(ii) 演繹的思考

の交流の上に成り立っている事実を理解させることが大切と考えられる。

さて、現実において、多くの学生が困難を感じるのには記号の多用と用語の複雑化と定理の羅列にある。あまり数学に興味がなく、漠然と将来においての必要性を感じて受講する学生にとって、これ程無味乾燥なものはなかろう。したがって、記号及び用語の定義については、天下り的でなく、その必要性を示し、これを用いることによって、簡単で且つ正確な表現にしたり、それによって思考が助けられることを、例をあげて理解させることである。

例えば、ユークリッド空間について最初から、 $n$ 次元空間が最も一般的な空間であって、二次元空間、三次元空間が特殊な空間である。という方向をとらない方がよいのではなかろうか。

すなわち

(1)  $n$ 次元ユークリッド空間  $R^n$  で、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  の距離  $d(x, y)$  は

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

と定義する。したがって、与えられた次元に応じて、suffix をつければよい。

とやるより

$d$  は Distance の頭文字で、二点間の距離を  $d(x, y)$  とすれば二次元ユークリッド空間では、 $x = (x_1, x_2)$ 、 $y = (y_1, y_2)$  より  $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ 。三次元ユークリッド空間では、 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 、 $y = (y_1, y_2, y_3)$  より

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

これの拡張として、 $n$ 次元ユークリッド空間では

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

とする。したがって、これらをまとめると(1)の形になる。との道筋を通った方が学生は親しみを感ずるらしい。

また、大半の学生は新しい知識を得ても、個々に独立して、相互の関連づけまでには一步の不足があるので、この慣れた記号、用語を次の新しい記号、用語に結びつけてやることが望ましいと思われる。

序文として、まだ書き足りない点多々あると思われるが、本文では授業で行っていたこと、ゼミで行われたこと、平常ひそかにこう関連づけたらどうか、等と考えていたこと等を、工学に比較的应用の広い函数論の一部分についてまとめた。

## I 複素数 $z$ の性格について

インドの代表的数学者、天文学者であるバースカラ (Bhāskara, 1114~?) が「正または負の数の平方は正であり、正数の平方根は正、負の2通りあるが、負数の平方根はない。負数は平方数とならないからである」といったとされている。16世紀になって2次方程式および3次方程式の完全なる解法を得る為には、どうしても負数の平方根を「仮想の数」、「架空の数」として、これを用いざるを得なくなった。「仮想の数」すなわち虚数をはじめて用いたのはイタリアの数学者カルダノ (G. Cardano, 1501~1576) であるといわれている。しかし虚数の正確な意味の説明はなされず不明のまま、計算上の記号として18世紀におよんでいる。虚数の幾何学的表現を試みて成功した学者は、ノルウェーのヴェッセル (C. Wessel, 1745~1818)、スイスのアルガン (J. R. Argand, 1768~1822)、ドイツのガウス (K. F. Gauss, 1777~1855) である。 $a+ib$  を複素数とガウスが名付けたのは、 $a+ib$  は  $1 \cdot a + i \cdot b$  となり、この2つの単位1、 $i$  から合成されたもの、というところからきたものであるといわれている。

2つの複素数を  $a+ib$ 、 $a'+ib'$  として、その相等と加減乗除は

$$(i) \quad a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow a=a', \quad b=b'$$

$$(ii) \quad (a+ib) \pm (a'+ib') = (a \pm a') + i(b \pm b') \quad (\text{複号同順})$$

$$(iii) \quad (a+ib)(a'+ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

$$(iv) \quad \frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + i \frac{-ab'+a'b}{a'^2+b'^2} \quad (a'^2+b'^2 \neq 0)$$

として種々の計算に用いられて来たが、この際の演算記号の $+$ は実数のときに適用された $+$ とは意味が異なる。これでは理論的にすっきりしない(あいまいさが残る)ので公理的に整理し直すと

$$(i) \quad \text{それぞれ } \alpha=(a, b), \alpha'=(a', b') \text{ を複素数とするとき } a=a' \text{ かつ } b=b' \text{ の場}$$

合に、またこの時に限り  $\alpha = \alpha'$  である。

$$(ii) \quad (a, 0) = a$$

$$(iii) \quad \alpha \pm \alpha' = (a \pm a', b \pm b') \quad (\text{複号同順})$$

$$(iv) \quad \alpha\alpha' = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

$$(v) \quad \frac{\alpha}{\alpha'} = \left( \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}, \frac{-ab' + a'b}{a'^2 + b'^2} \right) \quad \alpha' \neq (0, 0)$$

となる。ここで  $(0, 1) = i$  を導入すれば  $(a, b) = a + ib$  と書けることになる。この計算で  $i^2 = -1$  とおく他は実数と全く同じに取扱われる。このように説明しないと、公理をならべただけでは学生にはわかりにくい。また殆どの学生は漠然と複素数が数として最高のもの、つまりこれ以上拡張された数は無いと思いこんでいるが、時々学生から「複素数以上の数はないのか」との質問が出る。ここが一つのポイントであると思われる。

つまり加減乗除と交換、結合、配分の法則の成立の上に立った数体系、いうなれば形式不易の原理のもとにおいては、複素数以上に拡張された数は無いこと。しかし乗法において、交換法則の成立をはずすと 4 元数への進展があり、この 4 元数は普通の 4 元数と高級 4 元数にわかれ、高級 4 元数においては、 $a \neq 0, a' \neq 0$  であっても  $aa' = 0$  となることがあることを一言つけ加える必要があると考えられる。

さらに学生に 4 元数について質問をされた時には、 $1 = (1, 0, 0, 0), i = (0, 1, 0, 0), j = (0, 0, 1, 0), k = (0, 0, 0, 1), \alpha, \beta, \gamma, \delta$  は任意の実数として

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)(\alpha', \beta', \gamma', \delta') = (\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \delta\delta', \alpha\beta' + \beta\alpha' - \delta\gamma' + \gamma\delta', \alpha\gamma' + \gamma\alpha' - \beta\delta' + \delta\beta', \alpha\delta' + \alpha'\delta - \gamma\beta' + \beta\gamma')$$

と定義すると

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

となって、この約束のもとに

$a = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \alpha + i\beta + j\gamma + k\delta$  としたものを普通の 4 元数といい、この  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  が複素数のとき高級 4 元数という。で十分と思われる。

次にこまかいところに触れてみたいと思う。学生は今迄の習慣上、実関数の感覚が残っていて、 $y = f(x)$  つまり  $f(*)$  の形のは横軸からの距離と考えがちで、これが  $w = f(z)$  を理解する上に混乱を与えている。したがって、 $z$  平面上の点に対応する  $f(z)$  は  $w$  平面上で、また一つの点となることを例えば具点的な実例  $f(z) = z^2$  において、 $z$  にいろいろの値を与えて説明するとわかりやすい。複素数がベクトルとして表わされることについても

- (i) 「二つの複素数  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  の和は  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$  で与えられる。ゆえに、複素数の加法はベクトルの加法と全く同様にして得られる。すなわち、点 0 から点  $z_1$  にいたる線分  $\overrightarrow{0z_1}$  と 0 から  $z_2$  にいたる線分  $\overrightarrow{0z_2}$  とを隣辺とする平行四辺形の第四頂点が点  $z_1 + z_2$  を与える」

小松勇作著、函数論より抜萃

- (ii) 「原点 0 と点  $z$  とを線分で結び、 $\overrightarrow{0z}$  なる矢をつけると原点 0 に始点を持つベクトルが得られる。このベクトル  $\overrightarrow{0z}$  の大きさは絶対値  $|z|$  であり、その向きを考えに入れた方向は偏角  $\theta$  で与えられる。そこで複素数を大きさが  $|z|$ 、方向が  $\theta$  であるベクトルで表わす。そして、これをベクトル  $z$  と呼ぶことにする。……中略  
まず、点  $z + z'$  を求めるには、ベクトル  $z$  とベクトル  $z'$  の和のベクトル  $z + z'$  を平行四辺形（又は三角形）の方法で作って、ベクトル  $z + z'$  の始点を原点におくと、矢の尖端は点  $z + z'$  を表わす」

能代清著、初等函数論より抜萃

(i) より (ii) の方が学生に対して丁寧であり、これで十分と思われるが、本学において筆者のみて来たところによれば、学生はベクトルに対して以外に苦手意識をもっている傾向にあり、少数の学生〔受講生の  $1/8$  ないしは  $1/10$ 、(下調べをしてこないのが原因かも知れないが……)〕は (i) においての「二つの複素数  $z_1$  と  $z_2$  の和が  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$  であるから、 $\overrightarrow{0z_1}$  と  $\overrightarrow{0z_2}$  を隣辺とする平行四辺形の第四頂点が点  $z_1 + z_2$  となる」について、これは何故か、どうしてか、と疑問に思っても、この穴埋めをする意欲が、ベクトルと思った時に失せてしまっているのを見かける。したがって、複素数のベクトル表示については、とりあえずベクトルを先きにもちださないで、点 0,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_1 + z_2$  を結ぶ四辺形は平行四辺形となることを示す。すなわち  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  とすると、 $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$  であって、原点を 0 とするとき、2 点  $z_1$  と  $z_2$ 、0 と  $z_1 + z_2$  を結ぶ線分の midpoint の座標は、それぞれ共に  $((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$  であり、これは 4 点 0,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_1 + z_2$  を結ぶ四辺形の対角線が互いに他を 2 等分しているから、平行四辺形となる。したがって、 $z_1 + z_2$  を幾何学的に求めるときは、線分  $\overrightarrow{0z_1}$  と  $\overrightarrow{0z_2}$  を 2 辺とする平行四辺形を画くことによって解決出来る。ここにおいて、 $\overrightarrow{0z_1}$ ,  $\overrightarrow{0z_2}$  と考えれば、ベクトルの平行四辺形の法則と一致し、 $\overrightarrow{0z_1} + \overrightarrow{0z_2} = \overrightarrow{0(z_1 + z_2)}$  となる。つまり、こういう考え方を教示する必要があるのではないかと考えられる。

## II 複素函数 $w = f(z)$ の写像について

授業においては、竹内端三著、函数論上巻内の「変数および函数」で  $x$ ,  $y$  を独立

変数とし、 $z=x+iy$  によって、 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$  となることを示し、 $z$  平面  $\leftrightarrow w$  平面への写像を例および問題によって考察を進めている。

まず例であるが

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

について、 $z=x+iy$ 、 $w=u+iv$  とおくと

$$(1) \quad u = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}, \quad (2) \quad v = \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}, \quad (3) \quad x = \frac{-2v}{(1-u)^2+v^2},$$

$$(4) \quad y = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}$$

ここで、 $x=c$ 、 $y=c$  とおくと、それぞれ

$$(u-1)^2 + \left(v + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2} \quad (c \neq 0)$$

$$\left(u - \frac{c}{c+1}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(c+1)^2} \quad (c \neq -1)$$

となり、 $z$  平面上の二直線が  $w$  平面上の二円に写像される。ここで「函数  $w=(z-i)/(z+i)$  によって、直線が円に、円が直線に写像される」ということは、この例の主題であるが〔テキストのどの例も  $z$  が  $z$  平面上の円または直線上を動くときの  $w$  平面上への写像を扱っている〕これだけで終りにしては「 $z$  は円または直線上を動くもの」という印象を強く学生に与えてしまう恐れが多分にある。そこで、つぎのようなことの説明をつけ加えることが必要であろう。もともと  $z$  は  $x$ 、 $y$  を独立変数としているのであるから、特別な条件の無い限り、自由に動き得る点であること、すなわち、 $z$  が  $z$  平面上を自由に動くものとして、この例の(3)、(4)より

$$x > 0, y > 0 \longrightarrow v < 0, u^2 + v^2 < 1$$

$$x < 0, y > 0 \longrightarrow v > 0, u^2 + v^2 < 1$$

$$x < 0, y < 0 \longrightarrow v > 0, u^2 + v^2 > 1$$

$$x > 0, y < 0 \longrightarrow v < 0, u^2 + v^2 > 1$$

つまり、 $z$  平面の第一象限と第二象限が  $w$  平面の単位円内に、同じく第三象限と第四象限は単位円の外側にそれぞれ写像されていること。そして  $z=-i$  と  $w=1$  とは対応点がないことを説明することによって、 $z$  の動き方を幾何学的にも教示することが出来る。このように、くどい位の説明を学生にすることの可否についての議論はさておいて、実際では数学に興味をもっているのは、ほんのひとにぎりであること、そして、それ以外の学生を如何に苦手感を持たせずに必要レベルまで理解をさせられるか、その線を追求しているのである。

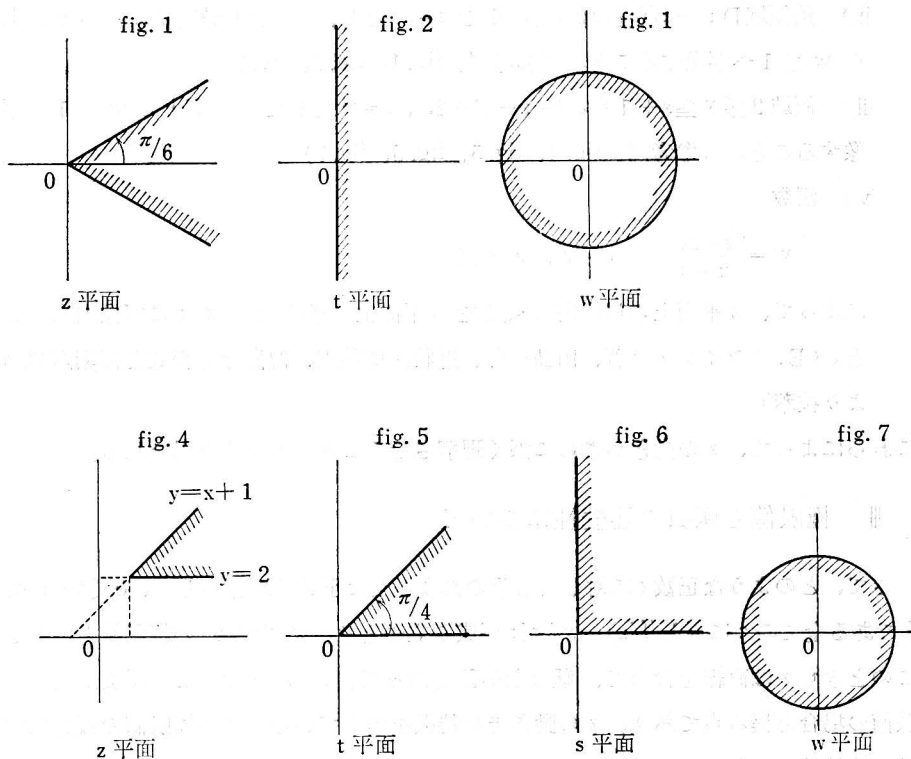
さて、ここで一般的な一次函数

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

を考えると、次の定理が成り立つ。

定 理

相異なる三点  $z_1, z_2, z_3$  は、あらかじめ定められた相異なる三点  $w_1, w_2, w_3$  へ常に一つ、しかもただ一つの一次写像  $w=f(z)$  により写すことが出来る。この写



像は陰函数としては、方程式

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} : \frac{w_2-w_1}{w_2-w_3} = \frac{z-z_1}{z-z_3} : \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}$$

により与えられる。(これらの点の一つが $\infty$ のときは、その点を含む二つの差の商を1で置き換えることにする。)

これによって、具体的には

- (i)  $z$  平面上の点  $(0, 2, 4)$  を  $w$  平面上の点  $(\infty, -5i, -4i)$  に写す一次交換を求めること。
- (ii) 角領域  $D; -\pi/6 \leq \arg z \leq \pi/6$  を  $t=z^3$  とし、 $t$  平面を媒介として  $w$  平面上の  $|w| \leq 1$  へ写像すること。(参考図、fig. 1、fig. 2、fig. 3)
- (iii) 領域  $2 \leq y \leq x+1$  を、 $t=z-(1+2i)$ 、 $s=t^2$  として  $w$  平面上の  $|w| \leq 1$  へ写像すること。(参考図、fig. 4、fig. 5、fig. 6、fig. 7)
- (iv) 函数

$$w = \frac{z-z_0}{cz-1} \quad c = \overline{z_0}, |z_0| < 1$$

によって、 $z$  平面上の単位円  $|z| < 1$  を  $w$  平面上の単位円  $|w| < 1$  に写像出来ること。(E. クライツィグ著、田島一郎、近藤次郎共訳、偏微分方程式と複素函数論より抜萃)

これらによって、 $z$  の動きがさらに深く理解させることが出来ると思われる。

### Ⅲ 極限值と函数の連続性について

さて、どのような正数  $\varepsilon$  に対してもその都度適当な正数  $\delta$  が存在して、 $0 < |z-z_0| < \delta$  である全ての  $z$  に対し  $|f(z)-w_0| < \varepsilon$  が成り立つとき、 $w_0$  を  $f(z)$  の極限值というがこのときも  $z$  は直線を含めて、種々な経路を通して、 $z \rightarrow z_0$  となることが実函数の極限值の場合と異なる点であり、 $z$  の動き方の特徴を示している。この極限値の概念は函数の連続性へつながる。つまり、どのような正数  $\varepsilon$  に対しても、その都度適当な正数  $\delta$  が存在し、 $|z-z_0| < \delta$  である全ての  $z$  に対し  $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$  が成り立つとき、 $z = z_0$  で  $f(z)$  は連続であるということ。ここで問題点と思われることは

- (i) 極限值の場合特に  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  の計算の際、学生から「 $z=z_0$ を代入する」という言葉をよくが、あくまでも  $z \rightarrow z_0$  において  $z=z_0$  は除いてあることをはっきりさせたい。また連続の場合は  $z=z_0$  であっても  $|f(z)-f(z_0)| = 0 (< \varepsilon)$  であるから、前述の表現形式において、 $0 < |z-z_0| < \delta$  でなく  $|z-z_0| < \delta$  とするだけで十分であるということもはっきりさせたい。



(ii)  $\varepsilon$ - $\delta$  法を、学生は 1、2 年を通して学習し、慣れているはずのものであるが、その中のテクニックにしばしばとまどいを感じているのを見受けることである。それは、論理を一段ずつ踏んで行くことではなく、こうするとまくいく、という形式を用いられているところにあると思われる。したがって、これを理解させるためには同類の問題をやらせて、慣れさせるとよいのではなかろうか。適切ではないかも知れないが、例えば  $\varepsilon$ - $\delta$  法によっての  $z^2$  の連続性については、 $|z - z_0| < \delta$  において  $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$  となる  $\delta > 0$  が存在することをいえばよい。そこで前記の「偏微分方程式と複素函数論」には次の証明がある。

$$|z^2 - z_0^2| = |(z - z_0)^2 + 2z_0(z - z_0)| \leq |z - z_0|^2 + 2|z_0||z - z_0| \cdots \cdots (1)$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4|z_0| + \sqrt{2\varepsilon}} \quad \text{とおくと}$$

$|z - z_0| < \delta$  より  $4|z_0||z - z_0| + \sqrt{2\varepsilon}|z - z_0| < \varepsilon$  よって 猶更  $4|z_0||z - z_0| < \varepsilon$ 、 $\sqrt{2\varepsilon} \times |z - z_0| < \varepsilon$  したがって  $2|z_0||z - z_0| < \varepsilon/2$ 、 $|z - z_0|^2 < \varepsilon/2$ 、ゆえに  $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$  となる。”

以上で「なるほど、こういう手段もあるのか」と理解出来る学生数はすくない。むしろ大半の学生は、 $|z^2 - z_0^2| = |(z - z_0)^2 + 2z_0(z - z_0)| \cdots \cdots (1)$  と変形するところと、特に  $\delta = \varepsilon / (4|z_0| + \sqrt{2\varepsilon}) \cdots \cdots (1)$  とおくところにかかなりの飛躍を感じている。したがって、(1)のような天下りのやり方をさける意味からも(1)において、 $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$  となるためには  $|z - z_0|^2 < \varepsilon/2$ 、 $2|z_0||z - z_0| < \varepsilon/2$  であればよく、 $\sqrt{2\varepsilon}|z - z_0| < \varepsilon$ 、 $4|z_0||z - z_0| < \varepsilon$  と変形することにより(1)が出てくるのであると、(1)の考え方の説明を行うことによって、学生の飛躍感もかなり軽くなるであろうし、この経験を通し、他のテクニックにも自信がつくことであろうと思われる。

ここにおいて  $z^3$  の連続性についても

$$|z^3 - z_0^3| = |(z - z_0)^3 + 3z_0(z - z_0)^2| \leq |z - z_0|^3 + 3|z_0||z - z_0|^2$$

$$\text{より } |z - z_0|^3 < \varepsilon/2, \quad 3|z_0||z - z_0|^2 < \varepsilon/2$$

$$\text{とし } 2\varepsilon^2|z - z_0|^3 < \varepsilon^3, \quad 6|z_0||z - z_0|^2 < \varepsilon$$

と変形することにより

$$\delta = \varepsilon / (6|z_0||z| + \sqrt[3]{2\varepsilon^2}) \quad \text{とおくことは素直に理解出来るものと思われる。}$$

しかし、この考え方つまり思考順序は、証明の終りから出発して  $\delta$  を定め、この  $\delta$  を用いて証明を行う形式になっていて、そして(1)を通して(2)に到達しているところも少々技巧に走り過ぎている感がないでもない。やはり学生に理解させる

立場で考えるなら、初めのうちは出来る限り順に段階を経て結論に到達する方法が望ましいと考えられる。つまり  $z^2$  の連続性については

$z_0=0$  なら  $|z^2-z_0^2|=|z|^2$  だから  $\delta$  として  $\sqrt{\varepsilon}$  をとればよい。

$z_0 \neq 0$  のときを考えると

$|z^2-z_0^2|=|z-z_0||z+z_0|$ 、 $|z+z_0|$  が一定の数  $M$  を超えないようにできれば、 $|z-z_0| < \varepsilon/M$  であるようにすれば  $|z-z_0||z+z_0| < \varepsilon$  となる。

そこで、 $|z-z_0| < |z_0|/2$  である  $z$  だけを考えると

$$0 < |z| < 3|z_0|/2 \quad \therefore |z+z_0| \leq |z|+|z_0| \leq 5|z_0|/2 \quad (\text{定数})$$

さらに

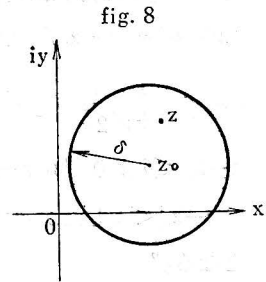
$$|z-z_0| < \frac{\varepsilon}{5|z_0|/2} \quad \text{なように } z \text{ を制限すれば}$$

$$|z^2-z_0^2| < \frac{\varepsilon}{5|z_0|/2} \cdot \frac{5}{2}|z_0| = \varepsilon \quad \text{となる。}$$

よって、 $\delta$  として

$$\min\left(\frac{1}{2}|z_0|, \frac{\varepsilon}{5|z_0|/2}\right) \quad \text{をとれば}$$

$|z^2-z_0^2| < \varepsilon$  となる。 $\therefore z^2 \rightarrow z_0^2 (z \rightarrow z_0)$  である。と考える道筋を説明するとわかりやすく自然ではないかと思われる。



(iii) 次に、この連続の条件を強めたものに一様連続がある。この定義は省略するが、連続と一様連続の内容のちがいがはっきりと理解出来る学生は数が少ない。これは、1、2年次で、実函数の一様連続性を学習する際、よく理解出来なかった上に難解なものと思い込み敬遠してきたところに原因があると思われる。したがって、理解の一助として、簡単な例を用い、一般の連続は任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、 $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$  であるが、一様連続は、 $\delta = \delta(\varepsilon)$  であること。例えば、実函数  $y = \tan x$ ,  $0 < x < \pi/2$ ,  $y = 1/x$ ,  $x > 0$  等を通して、 $f(z) = 1/z$ ,  $|z| > 0$  において  $f(z)$  が連続ではあるが、一様連続ではないこと、これらの例より函数が変域  $D$  上で一様連続であれば、 $D$  上で連続となるが、連続であっても、 $D$  上で必ずしも一様連続ではないこと、そして一様連続の概念が積分法の定理の証明に適用されていることなどを教示することによって、興味を起こさせることが出来るのではないかと考えられる。

## ま と め

比較的学生数の多い本学機械科数学教育(函数論)にあたって、全体的レベルの向

### 栗 原 芳 三

上をはかるにはどうしたらよいのであろうか、との観点に立って、日頃の学生との接触による試行錯誤の中に見出された、いくつかの最大公約数とも思えることを、自己満足に走るやを恐れつつまとめた。いまだ経験の浅い筆者の至らぬ点を御叱責いただけたらと存念致しております。

おわりに、この稿をまとめるようにすすめて下さった河合麟次郎教授とこの稿を通読して下さいった天草卯教授に御礼を申し上げます。

### 参 考 文 献

- (1) 函数論 小松勇作 朝倉書店
- (2) 初等函数論 能代 清 培風館
- (3) 函数論 竹内端三 裳華房
- (4) 解析概論 高木貞治 岩波書店
- (5) 偏微分方程式と複素函数論 E. クライツィグ 田島 近藤共訳 培風館
- (6) 複素数と4元数 坪郷 勉 槇書店
- (7) 数学史 武隈良一 培風館

(くりはら よしぞう 本学機械工学科助手)