

本学における数学教育についての一考察

栗 原 芳 三

序 文

本稿は本学機械系学科での数学をどのように教育すべきか、どのようにしたら効果をあげることができるか、ということについて、1973年工学院大学研究論叢第11号に掲載された「本学における数学教育についての一考察」の続編である。前回の「複素数 z の性格」、「複素函数 $w=f(z)$ の写像」、「極限值と函数の連続性」に続いて、今回は「複素微分法」、「複素積分法」である。一松 信著、解析学序説（上巻）のはしがきに「……解析学のわかりにくい点として、計算技術上の点と極限の概念とがあげられる。前者はある程度、実際の練習によって克服できるだろう。その時間が十分ないのがなげかれるが、これはむしろ教育制度の問題であろう。後者はたしかに講義の進め方の上で大問題なのである。もし数学を厳密な論理体系の上にきずくことを主眼とするならば、極限の概念について面倒な議論に、まず相当の時日を費さなければならぬまい。反対に実用を主としてなるべく早くすませたければ、厳密な証明を与えることは避けて、もっともらしい説明をもって代用せざるをえないであろう。

ところでふりかえてみると、少なくとも筆者の場合には、極限に関連した面倒な議論などは正直な所ほとんど理解できないまま、まず計算技術を覚えてしまい、力学の演習問題にでてくる微分方程式などのいくつかがとけるようになって、始めて極限の概念についてあらためて考え直し、それが少しずつ理解できるようになってきたように思う。人にはそれぞれの経歴があるが、微分積分学をこういつた順序でマスターしてきた人は、案外多いのではあるまいか。……」とあるが、筆者の体験では難解な点は極限の概念だけにとどまらず、いたるところに山積しているように思う。そして数学が専攻ではなくただ漠然と将来においての必要性を感じて受講する学生を、できるだけ多く興味をもたせ、理解させていくには、どうしたらよいかと長い間苦心してきた。このことに関していささかのべてみたいと思う。

I 微分法について

テキスト (竹内端三著、函数論上巻) では、 $z=x+iy$, $\lim_{h \rightarrow 0} \{f(z+h)-f(z)\}/h$ における h を $h=\xi+i\eta$ とし、 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 。 $u(x,y)$, $v(x,y)$ についての 4 つの偏導函数 u_x , u_y , v_x , v_y の存在と連続を仮定し、2 変数函数の平均値の定理によって

$$u(x+\xi, y+\eta)-u(x, y)=\xi u_x(x+\theta\xi, y+\theta\eta)+\eta u_y(x+\theta\xi, y+\theta\eta), \quad 0<\theta<1 \cdots \cdots (1)$$

ここで $\xi \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$ のとき、 $(\xi:\eta) \rightarrow (m:n)$ として $f(z)$ の微分係数

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \text{ を } \frac{mu_x+nu_y+(mv_x+nv_y)i}{m+ni} \text{ の形にし、これが } m:n \text{ に無関係}$$

に一定の値をとるためには

$$\frac{u_x+v_x i}{1} = \frac{u_y+v_y i}{i} \cdots \cdots (2)$$

これより Cauchy-Riemann の微分方程式

$$u_x=v_y, \quad u_y=-v_x \cdots \cdots (3)$$

を導いている。学生の大半は、2 変数函数の平均値の定理(1)を (過去に学習した際、よく理解していなかった為か) いやがる傾向にある。特に(2)にいたっては、自分で導ける学生の数はすくない。したがって学生は(1), (2)から(3)に到る思考過程等は適当に、お茶をにごしている。そして複素函数の微分可能については(3)だけ知っていればよいと考える傾向にある。

そこで学生に理解し易くするために Cauchy-Riemann の方程式が必要なことを示すだけにとどめておく方がよいと思われる。すなわち「 $f'(z_0)$ が存在するならば z が実軸に平行な方向から z_0 に収束しても、虚軸に平行な方向から収束しても $\{f(z)-f(z_0)\}/(z-z_0)$ は同じ値をとらねばならない筈である。さて $\Delta z=z-z_0$ を $\Delta x+\Delta y i$ とかき、ここで

$$\Delta y=0 \text{ において } \Delta z \rightarrow 0 \text{ ならしめると } \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \text{ は } u_x+v_x i \text{ に収束し}$$

$$\Delta x=0 \text{ において } \Delta z \rightarrow 0 \text{ ならしめると } \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \text{ は } v_y-u_y i \text{ に収束する。}$$

ゆえに z_0 においては $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ が成り立つことが必要である」と説明することによって、かなり学生を理解させることができた。

小松勇作著、函数論 (p. 29) に「……、一つの複素変数の複素函数を考えることは、一対の実変数の一対の実函数を考えることに帰着されてしまう。したがって、全く一般的な函数を取り扱う限りは、問題は二つの実変数 x, y の二つの実函数の対 $u=\varphi(x, y)$, $v=\psi(x, y)$ を論ずるのとなんらえらぶところがなく、別に複素数を引合に

出すまでもないわけである。……中略 函数論の主要な対象をなすものは、領域で定義されていて微分可能性の条件によって規定されるいわゆる正則函数である。……中略 函数論本来の面目は函数を $w=f(z)$ の形のままで処理することによって発揮される。……省略」と述べてある。学生に対し、このことをよく説明するのであるが、学生は第2章で写像を学習した際、函数 $f(z)$ を実部と虚部にわけて考えたことが非常に印象強かったらしく本学（機械系学科）で筆者が見てきた限りでは、テキストに「 $f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$, $u_x=2x$, $u_y=-2y$, $v_x=2y$, $v_y=2x \therefore f'(z)=2x+2yi=2z$ 」とか「函数 $f(z)=x(x^2-3y^2)+y(3x^2-y^2)i$ は z の任意の値において微分係数を持つこと、およびその値は $3z^2$ に等しいことを示せ」のような述べかたをされているので導函数 $f'(z)$ を求める際、多くの学生は $f'(z)=u_x+iv_x$ の形にとらわれてしまって $f(z)=z^3+2z$, $f(z)=1/(z+1)$ ……等を全て $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ の形にしてから x で偏微分して $f'(z)$ を求めている。そして学生は複素函数の導函数の求め方と実函数の導函数の求め方のちがいにとまどっている。このような時は定義にもどって、あくまでも $f'(z)=\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \{f(z+\Delta z)-f(z)\}/\Delta z$ であることや、函数の微分可能性を考えれば、すべて実函数の導函数を定義することと形式は殆んど全部同じであることを教示することによって、学生はかなり複素函数の微分法に親しみを持つと考えられる。

ここにいたって「函数 $f(z)$ が $z=z_0$ で正則であるということは、一点 z_0 だけで微分係数を持つという意味でわなく、点 z_0 のある近傍においても微分可能である」とか「二つの函数 $f(z)$ および $g(z)$ が共に $z=a$ において正則にして、かつ $f(a)=0$, $g(a)=0$, $g'(a) \neq 0$ なるときは $\lim_{z \rightarrow a} f(z)/g(z)=f'(a)/g'(a)$ が成り立つ」これは一年次に学習した不定形の極限値を求める際の L'Hospital の定理に相当するものである。とか「実函数 $f(x)$ においては、 x で一度微分できれば何回でも微分できるといような定理はなかった。しかし複素函数 $f(z)$ については、 $f(z)$ が領域 D で正則であれば D 上で必ず逐次導函数が存在し、これらは D 上で正則である」等と少々先のことかも知れないが、アウトラインを説明することによってさらに学生に興味を持たせることが出来るのではないかと思われる。

II 積分法について

1. テキストでは、まず正則曲線 C に沿って、 z_0 から Z に到る函数 $f(z)$ の定積分を定義し、これを $\int_{z_0(z)Z} f(z)dz$ で表わしている。そして $f(z)$ が連続函数である

とき、この定積分が存在することを次の4段階にわけて証明してある。

(i) $S_n = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) f(\zeta_k)$ (ただし、 $z_n = Z$ $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ は各曲線分 $z_0 z_1, z_1 z_2, \dots, z_{n-1} Z$ 上の任意の点) ここで曲線分 $z_0 z_1, z_1 z_2, \dots, z_{n-1} Z$ をさらに n_1 個, n_2 個, \dots, n_n 個にわけ、 $n_1 + n_2 + \dots + n_n = N$ とし、 N 分された各曲線上の任意の点を $\zeta'_1, \zeta'_2, \dots, \zeta'_N$ とする。このとき $S_N = \sum_{k=1}^N (z'_k - z'_{k-1}) f(\zeta'_k)$ (ただし、 $z'_1 = z_1, z'_{n_1+1} = z_2, \dots, z'_N = Z$ とする) とするとき、 S_n と S_N について、各曲線の長さを小さくすれば $|S_n - S_N|$ をいくらでも小さくすることができる。

(ii) z_0 から Z に到る間の曲線 C を n 分して和 S_n を作り、また別に m 分して和 S_m を作る。ここで S_m, S_n の区分を十分小さくしておき、これらの分点を一緒にして、前と同様の和 S' を作れば(i)により、任意の正の数 ε に対し $|S_n - S_m| < \varepsilon$ 。

(iii) 今度は z_0 から Z に到る間の曲線 C の長さを n 等分し、各区間において z_0 に近い端を \bar{z} として作った和 S_n を \bar{S}_n とする。 \bar{S}_n は n だけの函数として定まり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n$ が有限確定である。

(iv) 曲線 C の区分が等分でない場合であっても、その各曲線分を十分小さくとり、(iii)における $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n$ を I とすれば (iii) によって、 $|S_n - \bar{S}_n| < \varepsilon/2$, $|\bar{S}_n - I| < \varepsilon/2$ ゆえに $|S_n - I| < \varepsilon$ 。

これは数学的には大切なことであるが、きわめて難解であるので、下調べをしてきた、発表者である学生自身がノートの中身を黒板に書き、これを読むのがやっとなで、余裕をもつて説明する状態ではない。したがって殆んどどの学生は、あきらめの様子を示し、全く興味を示さない。(理解している学生と理解しようと努力している学生との総数は全体の1割位である) このような時は「前述の条件のもとで定積分は存在するのである」の程度でとどめ、

$$\int_{z_0(c)Z} f(z) dz = - \int_{Z(c)z_0} f(z) dz$$

$$\int_{z_0(c)Z} \{f_1(z) + f_2(z)\} dz = \int_{z_0(c)Z} f_1(z) dz + \int_{z_0(c)Z} f_2(z) dz$$

等が成り立ち実積分と同じ形であることを示す程度にとどめるのがよいと思われる。そして学生は積分に入る前の段階の $z = z(t)$ の考え方をよく理解できてないので具体的な実例、例えば

1) AからBに向う線分を $z = z(t)$ のような形に表わせ。

(i) A: $z=0$, B: $z=3-2i$

(ii) $A: z=1-i$, $B: z=9-5i$

2) 放物線 $y=x^2$ の $(0,0)$ から $(2,4)$ までを $z=z(t)$ の形で表わせ。

3) 次の函数はどのような曲線を表わすか。

(i) $z(t)=2-3t+(4+t)i$ ($0 \leq t \leq 1$)

(ii) $z(t)=t+2t^3i$ ($-2 \leq t \leq 2$)

等の練習をさせたのちに、次のような問題に入るのがよいと思われる。

$\int_c z^2 dz$ を計算せよ。

(i) $c: 0$ から i までの線分。 (ii) $c: 2$ の放物線。

(iii) $c: 0, 1, 1+i, i$ をもつ正方形の周。

このような問題をできるだけ多く学習させ、その後でテキストの例の上に立つて、被積分函数 $f(z)$ が z の場合 (一般に $f(z)$ が単一連結の領域で正則な場合) 複素積分は積分路に無関係で、その両端の点によって決定する。 $f(z)=x$ のように $f(z)$ が不正則な函数であるときは積分路のとり方によって異なった値をとる。等と説明を加えることによって、複素積分への手がかりを学生に理解させることができるのではないと思われる。

2. 次にテキストでは線積分を定義し、複素積分と線積分の関連性に触れ、Green の定理を経て Cauchy の定理に到っている。

さて、この Cauchy の定理の証明 (テキストでは Goursat の証明を用いている) について質問をする学生は先ず殆んどいない。どう考えても大多数の学生が、これを理解できたからであるとは思えない。筆者の学生時代の体験から考えれば、このような証明を苦しみながらも理解することは、次の定理を理解する上に大きな力ともなり、自信をつけることにもなるとと思われるが、学生は反応を示さない。筆者が学生に望むところと、数学を専攻としない学生の教室での雰囲気とは、かなりのかけはだてがあることを痛感する。したがって、このような時は、正則函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ において、 u および v が連続な偏導函数を持つことを仮定し、Green の定理を用い $\int_c f(z) dz = 0$ を証明する。そして、この定理の大意がどのようなものであるか、例えば具体的な実例

1) 次の積分のうちコーシーの定理を応用できるのはどれか。

(i) $\int_c \frac{z^2}{\cos z} dz$ $c: |z|=1$ (ii) $\int_c \frac{z^2}{\cos z} dz$ $c: |z|=2$

(iii) $\int_c \frac{\sin z}{z} dz$ $c: |z|=1$ (iv) $\int_c \frac{\sin z}{z^2} dz$ $c: |z|=1$

2) どのような単一閉曲線に対して $\int_c z^{-1} dz = 0$ となるか。

3) c を単位円とすると $\int_c z^{-4} dz = 0$ のことを示せ。これはコーシーの定理から導かれるか。

特に 3) では $\int_c f(z) dz = 0$ が成立するための十分条件は「 $f(z)$ が領域 D で正則である」ことであるが、これは必要条件ではない等を教示し、学生の理解をまっぴらに進むことが望ましいと考えられる。

3. 前記においては $f(z)$ が有限な単連結領域 D で正則として議論してきたが、領域 D の内部に不正則点が存在するとき、ここに留数が登場する。

テキストでは $z=a$ における留数を A とすれば

$$\int_c f(z) dz = 2\pi i A \cdots \cdots (1)$$

領域 D の内部の n 個の不正則点に対する留数を A_1, A_2, \dots, A_n とすれば

$$\int_c f(z) dz = 2\pi i (A_1 + A_2 + \dots + A_n) \cdots \cdots (2)$$

等の関係を述べている。(1)、(2)の積分と留数の関係式がはっきりと理解できない学生には、留数を求める単純な計算を学習させるとよいのではないだろうか。実際

$$\frac{z-i}{z+i}, \frac{z}{z^2-1}$$

等の留数を求める計算ができるようになると親しみが出てくるせい(1)、(2)を理解するようになる。こうなると学生からテキストに

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{1}{z^2} = \infty$$

であって、有限確定な値は存在しないけれども、単位円を正の方向に一周する積分

路をとれば $\int_c 1/z^2 dz = 0$ となるから、実は $A=0$ であるはずである」とあるが、

この場合、留数を求める計算をどうやればよいのか。との質問が出る。このようなときは、定理の証明等はさておいて、 $f(z)$ が $z=a$ において m 次の極をもつとき、 $z=a$ における $f(z)$ の留数は

$$A = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m f(z) \right]_{z=a}$$

であることを教示し、さらに

$$\int_c \frac{z+1}{2z+i} dz, \quad \int_c \frac{z^2+1}{z^2-2z} dz, \quad \int_c \frac{1}{z^3} dz, \quad \int_c \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^5} dz,$$

c は全て $|z|=1$ (正方向)

等を計算させ理解を深めさせることが望ましいのではないかと考えられる。そして留数を使つて実積分の計算を行う場合でも、初めて学習にあたる学生は「実変数から複素変数へ変換することと、その時の積分路をどのようにとればよいか」について理解できていないので、できるだけタイプ別に、例えば

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{g(x)} dx, \quad \int_0^{\infty} f(x) \cos px dx, \quad \int_0^{\infty} f(x) \sin px dx$$

のような順に積分計算を学習させていつたらよいのではないと思われる。さて、この留数を応用したものに Cauchy の積分表示と呼ばれる定理がある。留数を理解した学生にとっては別に問題がないように見受けられるが、この場合もやはり実例を通して学生に、この定理の大意をつかませた方がよいのでわなかろうか。例えば

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z-a} dz \text{ であるから、 } c: |z-i|=1 \text{ とするとき}$$

$$I = \int_c \frac{z^2-1}{z^2+1} dz = \int_c \frac{z^2-1}{z+i} \cdot \frac{1}{z-i} dz \text{ によって } f(z) = \frac{z^2-1}{z+i}, \text{ ここで } f(z) \text{ は } c \text{ の内部で正則であり、周囲 } c \text{ 上で連続であるので}$$

$$I = 2\pi i f(i) = 2\pi i \left[\frac{z^2-1}{z+i} \right]_{z=i} = -2\pi, \quad c: |z-i|=2 \text{ とすると } c \text{ の周上の点 } z=-i \text{ で } f(z) \text{ は不連続となるから定理は適用できない。したがって } c \text{ の半径を } 2 \text{ より大きくとれば、} c \text{ の内部で } f(z) \text{ は不正則点をもつからやはりこの場合も駄目である。等と説明を加えることによって、学生は今までに学習した定積分と、Cauchy の積分表示との関係がさらに明確になり興味を持つようになるのではないと思われる。}$$

ま と め

比較的学生数の多い本学機械系学科数学教育（函数論）にあたって、全体的レベルの向上をはかるにはどうしたらよいのであろうか、との観点に立つて、日頃の学生との接触による試行錯誤の中に見出された、いくつかの最大公約数とも思えることを、自己満足に走るやを恐れつつまとめてみた。いまだ経験の浅い筆者の至らぬ点を御叱責いただけたらと存念致しております。

おわりに、この稿をまとめるようにすすめて下さった河合麟次郎教授と、この稿を閲読されて懇切な多くの助言を与えて下さった天草 卯教授に御礼を申し上げます。

参考文献

- (1) 函数論：小松勇作，朝倉書店
- (2) 初等函数論：能代 清，培風館

栗 原 芳 三

- (3) 函数論：竹内端三，裳華房
- (4) 解析概論：高木貞治，岩波書店
- (5) 偏微分方程式と複素函数論：E. クライツィグ，田島，近藤共訳，培風館
- (6) 関数論とその応用：石津武彦，斎藤 修，コロナ社
- (7) 解析学序説：一松 信，裳華房

(くりはら よしぞう 本学助手・機械工学)