ベルヌーイ数に関連する二つの注意

大　沢　敏　行

ここに $(n-1)_k$ という記号の使用を提唱する。これは要するに二つの自然数 n,k によって定まる関数であるからどう書いてもよいようなものだが、そのように書くのがもっともよいように思われるからである。この二変数の関数の主要な性質とその応用としてベルヌーイ数の性質を述べる。

二項定理によって $(n-1)^k$ を展開した後、底と指数を交換したものを以後 $(n-1)_k$ という記号で示す。

$$(n-1)^k=n^k-\binom{k}{1}n^{k-1}+\cdots\cdots+(-1)^k n^0$$

であるから

$$(n-1)_k=k^n-\binom{k}{1}(k-1)^n+\cdots\cdots+(-1)^k 0^n$$

たとえば

$$(2-1)_3=3^2-3\times2^2+3\times1^2=0$$

$$(3-1)_3=3^3-3\times2^3+3\times1^3=6$$

$$(4-1)_3=3^4-3\times2^4+3\times1^4=36 \text{ 等}$$

以下に基本的な性質を列記する。

（イ）　$(n-1)_k$ は $n<k$ のとき 0, $n=k$ のときは $k!$ である。

何となれば $(e^x-1)^k=e^{kx}-\binom{k}{1}e^{(k-1)x}+\cdots\cdots$

を n 回微分して $x=0$ とおけば $(n-1)_k$ を得るが上の関数は x^k から始まるマクロリーン展開をもつから上の通り。

（ロ）　自然数 n を k 個の自然数の和に分解して $n_1+n_2++\cdots n_k$ とするとき、そのすべての場合について（順番もいれて）$n!\div n_1!n_2!\cdots n_k!$ を作れば、これが $(n-1)_k$ となる。

何となれば、前に出て来たことであるが

$$(e^x-1)^k=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(n-1)_k}{n!}x^n$$

であるからこれを$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^k$の形に書いて係数を比較すれば上の結果を得る。

（ロ′） 特に $k=2$ の場合として

$$(n-1)_2=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}$$

を得る。

（ハ） $(n-1)_k$ は $k!$ の倍数である。

何となれば、$(e^x-1)^{k+1}$ の展開式を作って微分すれば

$$(k+1)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(i-1)_k}{i!}x^i=\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{(i-1)_{k+1}}{(i-1)!}x^{i-1}$$

ここで x^{n-1} の係数を比較して

$$(n-1)_{k+1}=(k+1)\sum_{i=k}^{n-1}\binom{n-1}{i}(i-1)_k$$

これから、$m<n$ のとき $(m-1)_k$ が $k!$ の倍数であることを仮定すれば、$(n-1)_{k+1}$ が $(k+1)!$ の倍数であることが出て来る。よって帰納的にはじめに述べたことが成立するのである。$(n-1)_k$ に関する次表参照。

n \ k	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0
3	1	6	6	0	0	0
4	1	14	36	24	0	0
5	1	30	150	240	120	0
6	1	62	540	1560	1800	720

（ニ） $\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n$ によってベルヌーイ数 b_n を定義すれば

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(n-1)_k}{k+1}$$

これは

$$\frac{x}{e^x-1}=\log\frac{\{1+(e^x-1)\}}{e^x-1}=1-\frac{e^x-1}{2}+\frac{(e^x-1)^2}{3}-\cdots$$

を使って

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{1}{2}\left\{(1-1)_1x+\frac{(2-1)_1}{2!}x^2+\frac{(3-1)_1}{3!}x^3+\cdots\right\}$$

$$+\frac{1}{3}\left\{\frac{(2-1)_2}{2!}x^2+\frac{(3-1)_2}{3!}x^3+\cdots\right\}$$

$$-\frac{1}{4}\left\{\frac{(3-1)_3}{3!}x^3+\cdots\right\}$$

から出る。

（ホ） pを素数として $GF(p)$ の中で考えるとき $(n-1)_{p-1}=1^n+2^n+\cdots+(p-1)^n$

何となれば $\binom{p-1}{r}=\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-r)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdots r}=(-1)^r$

であるから

$$(n-1)_{p-1}=(p-1)^n+(p-2)^n+\cdots+2^n+1^n$$

（ヘ） 再び $GF(p)$ の中で考えるとき

$$(n-1)_{p-1}=\begin{cases}-1 & p-1\ \text{が}\ n\ \text{の約数}\\ 0 & \text{そうでないとき}\end{cases}$$

何となれば、$p-1|n$ なら $1^n, 2^n, \cdots$ はすべて1に等しいからはじめのことが成立し、$p-1\nmid n$ なら、pの原始根を ρ とすれば $1^n, 2^n, \cdots$ は全体としては $1, \rho^n, \rho^{2n}, \cdots$ に等しいから、それらの和は $\rho^n\neq 1$ から

$$\frac{\rho^{(p-1)n}-1}{\rho^n-1}$$

となり、この分子が0だからである。

（ト） トベルヌーイ数 b_n は、ある整数から、$p-1$ がnを割り切るような素数pの逆数の和を引き去ったものに等しい。

何となれば b_n を

$$-\frac{1}{2}(n-1)_1+\frac{1}{3}(n-1)_2-\cdots+\frac{(-1)^n}{(n+1)}(n-1)_n$$

の形に分解するとき、$(n-1)_k$ は $k!$ の倍数であるから、$k+1$ が素数でなければ

$$\frac{(n-1)_k}{k+1}$$

は整数である。$k+1$ が素数であったとしても、これがnを割り切らなければやはり整数である。$p-1$ がnを割り切るときは

$$(n-1)_{p-1}\equiv -1 \pmod{p}$$

であるから、$k=p-1$ として

$$\frac{(n-1)_k}{k+1}=\text{整数}-\frac{1}{p}$$

よってはじめに述べたとおりである。

たとえば

$$b_4=-\frac{(4-1)_1}{2}+\frac{(4-1)_2}{3}-\frac{(4-1)_3}{4}+\frac{(4-1)_4}{5}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{14}{3}-\frac{36}{4}+\frac{24}{5}$$

$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=-\frac{1}{30}$$

次にベルヌーイ多項式について述べる。

$S_n(x)=1^n+2^n+\cdots\cdots+x^n \qquad n\geqq 2$

によって $S_n(x)$ を定義するとき、$S_n(x)$ は n が偶数なら $x(x+1)(x+\frac{1}{2})$ で、奇数なら $x^2(x+1)^2$ でそれぞれきっかりわりきれるという事実はあまり知られていないようなので以下に簡単な証明を与える。

$$\varphi(x,z)=\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(x)}{k!}z^k$$

によって $B_k(x)$（いわゆるベルヌーイ多項式）を定義すれば、

$$B_k(x)=x^k+\binom{k}{1}b_1x^{k-1}+\cdots+b_k$$

がなりたつ。b_i は前出のベルヌーイ数である。次の三つの性質を使う。

(イ)　$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$

(ロ)　$B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x)$

(ハ)　$B_n'(x)=nB_{n-1}(x)$

はじめの式の x を順に 0 から x（自然数）まで代入して辺々加えて n を $n+1$ に変えれば

$$S_n(x)=\frac{1}{n+1}\Big\{B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(0)\Big\} \quad \cdots\cdots(1)$$

（i）　n が偶数のとき $B_{n+1}(0)=b_{n+1}=0$ だから

$$S_n(x)=\frac{1}{n+1}B_{n+1}(x+1)$$

一般に(イ)から $B_k(0)=B_k(1)$（$k\geqq 2$）を得るが、これから

$$S_n(0)=0,\ S_n(-1)=0$$

が出る。更に

$$S_n'(x)=B_n(x+1)$$

から、$S_n'(0)\neq 0$ $S_n'(-1)\neq 0$ が出る。よって、0, -1 は $S_n(x)$ の1位の零点である。又(ロ)から

$$B_k\left(\frac{1}{2}\right)=(-1)^kB_k\left(\frac{1}{2}\right)$$

故に k が奇数なら $B_k\left(\frac{1}{2}\right)=0$ である。よって n が偶数のとき

$$S_n\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

又 $S_n'(x)$ 即ち $B_n(x+1)$ はXに $-\frac{1}{2}$ を代入して0にならない。何となれば、nを偶数として

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

が成立するなら $S_{n-1}(x)$ が $(0,1)$ に於て少くとも二つの根をもつことになって不合理だからである。(奇数番号の $S_n(x)$ は、$(0,1)$ に唯一つの根 $\frac{1}{2}$ をもつのみだからである。) よって $-\frac{1}{2}$ は $S_n(x)$ の単根である。

(ii) nが奇数のとき

$$S_n(x)=\frac{1}{n+1}\left\{B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(0)\right\}$$

からただちに $S_n(0)==S_n(-1)=0$ を得る。

$$S_n'(x)=B_n(x+1)$$
$$S_n''(x)=nB_{n-1}(x+1)$$

これから

$$S_n'(0)=S_n'(-1)=0$$
$$S_n''(0)=S_n''(-1)=nb_{n-1}\neq 0$$

よって、$0,-1$ は共に $S_n(x)$ の二位の零点であることがわかった。まとめて

$S_n(x)$ は $n\geqq 2$ のとき、nが偶数のときは $x(x+1)(2x+1)$ で、奇数のときは $x^2(x+1)^2$ でわりきれる。前者では $0,-1,-\frac{1}{2}$ はそれぞれ一位の零点、後者では 0, -1 はそれぞれ2位の零点である。はじめにきっかりわりきれるといったのはその意味であった。

いくつか実例を計算すると

$$S_2(x)=\frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$$

$$S_3(x)=\frac{1}{4}x^2(x+1)^2$$

$$S_4(x)=\frac{1}{30}x(x+1)(2x+1)(3x^2+3x-1)$$

$$S_5(x)=\frac{1}{12}x^2(x+1)^2(2x^2+2x-1)$$

$$S_6(x)=\frac{1}{42}x(x+1)(2x+1)(3x^4+6x^3-3x+1)$$

等となるが、この残りの因数はおそらく有理数の範囲では、因数には分解されないのではないかと予想される。それは残された問題である。

参照　前半　T. Apostol
Introduction to Analytic Number Theory
後半　高木貞治
解析概論

（おおさわ　としゆき　本学講師　数学）