

グラフ理論を mod と整数で考える

東京都立戸山高等学校 SSII 数学 岡田源市朗

1. 動機

1 年次に整数とグラフ理論を用いて研究をしていて整数に関する関数をグラフ理論におけるグラフで表そうとしたが逆に関数や式などでグラフ理論におけるグラフを表すことができるのではないかと思ったから。

2. 研究方法

グラフ理論におけるグラフ (有向グラフ) とは左図のように頂点の集合と向きのある辺の集合のペアのことで、左下のグラフを例にすると、



頂点を v_1, v_2, v_3 辺を (v_1, v_2) , (v_1, v_1) (辺の始点、終点の順) のように表すことができる。今後頂点 v_n の v は省略して頂点 n と呼ぶ。今までの研究で、 n 個の頂点 $0, 1, 2, \dots, n-1$ と x, y の 2 変数からなる $(\text{mod } n)$ の合同式の解 (x, y) ($0 \leq x \leq n-1, 0 \leq y \leq n-1$) を辺とするグラフについて考えてきた。そして n が素数の時は要素が $0, 1$ からなる隣接行列 (点 i から点 j へと結ぶ辺の本数を第 ij 要素とする $n \times n$ の行列) で表されるグラフすべてを一つ以上上記の方法で表せることが分かっている。 $(0 \equiv 1)$ のような合同式を含みこの場合解なし = 辺がないものとする) 具体的には $\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k \equiv 0$ (ただし a_k は y の整式で $a_k \equiv 0$ となるような a_k の解が点 k を始点とする辺の終点となるもので、 $b_k = 1 - (x - k)^{n-1}$) とすると任意のグラフが作れる。今回は n が素数 (頂点の個数が素数個) のグラフのうち特徴的なグラフにおける辺を表す合同式を考えていく。

3. 結果

$\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k$ の計算に

WolframAlpha (<https://ja.wolframalpha.com/examples/mathematics/algebra/polynomials/>) を使用した。

◦ 完全グラフ

(相異なる 2 頂点が全て互いを向いた 2 辺で連結しているグラフ)

($n=k$ の時 $\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k \equiv 0$ を簡単にしたもの)

$n=2$ の時 $x+y+1 \equiv 0 \pmod{2} \cdots \textcircled{1}$

$n=3$ の時 $x^2+xy+y^2+2 \equiv 0 \pmod{3} \cdots \textcircled{2}$

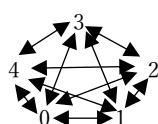
$n=5$ の時 $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4+4 \equiv 0 \pmod{5} \cdots \textcircled{3}$

①

②

③

$0 \leftrightarrow 1$



(\leftrightarrow を合わせて \longleftrightarrow と表した)

◦ トーナメント

(任意の 2 点がちょうど 1 本の辺で結ばれている有向グラフ)

$n=2$ の時のトーナメントの一つ $xy+y+1 \equiv 0 \pmod{2} \cdots \textcircled{4}$

$n=3$ の時のトーナメントの一つ $2x+y+2 \equiv 0 \pmod{3} \cdots \textcircled{5}$

$n=5$ の時のトーナメントの一つ

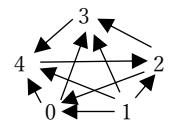
$$4x^4y^4+4x^4y^3+2x^4y^2+2x^4y+4x^4+4x^3y^4+4x^3y^3+2x^3y^2+3x^3y+4x^2y^4+4x^2y^3+x^2y+3x^2+4xy^4+4xy^3+xy^2+2xy+x+y^2+3y+2 \equiv 0 \pmod{5} \cdots \textcircled{6}$$

④

⑤

⑥

$0 \rightarrow 1$



4. 考察

結果より完全グラフは $\sum_{k=1}^n x^{n-k} y^{k-1} + n - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ と表せると推測できる。この合同式を変形すると $x \equiv y$ でない時 $(x^n - y^n) / (x - y) \equiv 1$ となり、両辺に $x - y$ をかけて整理すると $x^n - y^n \equiv x - y$ となる。ここで $x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$ であり $x \equiv 0$ の時 $x^n - x \equiv 0$ である。また $x \equiv 0$ 以外の時フェルマーの小定理 (p が素数で a が p の倍数でない正の整数の時 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$) より、 $(x^{n-1} - 1) \equiv 0$ であるから $x(x^{n-1} - 1) \equiv 0$ となる。したがって n が素数の時、整数 x の値に関わらず $x^n - x \equiv 0$ が成り立つ。同様に $y^n - y \equiv 0$ も成り立つので n が素数の時 $x^n - x \equiv y^n - y \pmod{n}$ は常に成り立つといえる。したがって n が素数の時 $\sum_{k=1}^n x^{n-k} y^{k-1} + n - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ は $x \equiv y$ でない時常に成り立つ。また、 $x \equiv y$ のときは $nx^{n-1} + n - 1 \equiv 0$ となり、 $nx^{n-1} + n \equiv 0$ より $-1 \equiv 0 \pmod{n}$ となるが明らかに成り立たない。よって $\sum_{k=1}^n x^{n-k} y^{k-1} + n - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ の解は $x \equiv y$ でないすべての (x, y) となり、これを辺とみなすと実際相異なる 2 頂点が全て互いを向いた 2 辺で連結するようになっている。また、トーナメントについて、④と⑤の左辺の次数を比べると⑤のほうが次数が小さくなっているが、これは⑤の各頂点における出次数 (その頂点が始点となるような辺の個数) と入次数 (その頂点が終点となるような辺の個数) が等しく一定であるからだと考えられる。

5. 今後の展望

頂点の個数に関係なく全てのグラフと合同式を対応できるようにしたいの和其他の特徴的なグラフと合同式との関係も考えたい

6. 参考文献

寺田文行・中村直人・釈氏孝浩・松井原則、『情報数学の基礎』,サイエンス社,1990.

齋藤正彦、『初めての群論』,日本評論社,2005.

グラフ理論講義ノート-北海道大学

<https://ocw.hokudai.ac.jp/wp-content/uploads/2016/01/GraphTheory-2007-Note-all.pdf>