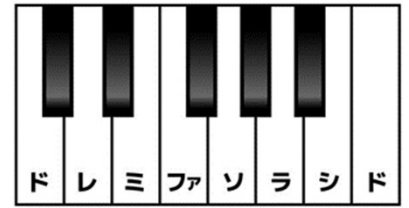


音程と数学

都立戸山高等学校SS | 数学 近藤亜衣

前回の結果

平均律、純正律、ピタゴラス音律のうち、ピタゴラス音律を用いて研究を進めた。ピタゴラス音律では完全8度で周波数比が1:2、完全5度で2:3になると定められているが、その比を用いて周波数を計算すると1オクターブごとに周波数のずれが生じるという欠点がある。そこで完全8度で1:2という比を基準に、2:3という数字を変えて計算上だけでもずれを減らすことができないか調べた。その結果、まだずれを減らすことはできなかったが、やはり2:3に近い比を用いることでずれは少なくなった。



研究方法

前回2:3に近い整数比を手作業で探したが、今回は完全8度の2:3という基準から逆算して考えた。同じC(ド)の音からそれぞれ完全8度と完全5度を重ねると、4オクターブ上で再び同じC(ド)になる。一番始めのC(ド)の周波数を1とすると、完全8度で周波数は2倍になることから、4オクターブ上のC(ド)の周波数は16となる。これを基準としてエクセルを用いて計算した。

研究結果

ピタゴラス音律の周波数比は完全8度で1:2、完全5度で2:3なので、計算をすると次のようになる。

完全8度	1			2				4				8				16												
	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド						
完全5度	1			1.5				2.25				3.375				5.0625				7.59375				11.390625				17.0859375

完全8度を重ねると4オクターブ上のドは16なのに対し、完全5度を重ねたときの4オクターブ上のドは17.0859375となっている。よって、ピタゴラス音律では4オクターブ上がると周波数が1以上ずれてしまうことがわかる。このとき、2/3が7乗されていることから、16の7乗根を考えることでずれの少ない完全5度の比を求めることができると考え、エクセルを用いて計算した。その結果は1.485994...となった。

完全8度	1	2	4	8	16			
	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
完全5度	1	1.486	16.000430...

上のように約1.486として計算すると、4オクターブ上のドは16.000430...となり、ピタゴラス音律のずれよりも小さくすることができた。これを分数に直すと743/500となることから、ピタゴラス音律の完全5度の周波数比2:3に対して、完全5度の周波数比を約500:743に置き換えるとずれが小さくなると分かった。

まとめ・今後の課題

完全8度の基準に合わせて逆算をすることで、2:3よりもずれの少ない値を求めることができた。しかし、2:3のほうがより純正な響きであるので、今回求めた周波数比にはずれをそれぞれの音に分散しているだけであるという欠点がある。これは平均律の欠点と同じだと言えるので、今後はそれぞれの音律の違いにも着目して周波数のずれについて調べていきたい。

参考文献

<https://inalesson.com/equal-temperament/2441/>

ピアノの音律に用いられる12平均律とは？特徴と周波数比の計算 2022.12.05

<https://composer-instruments.com/scale-and-frequency/>

音階と周波数の関係（平均律一覧表） | 音楽力の泉 2022.15