

9パズルの攻略の最短手数

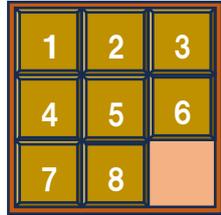
戸山高等学校 SSI 数学 1年B組27番 早川誠之輔

○研究動機

ルービックキューブは最大でも、最短二十手で元の状態に戻すことができる。そこで9パズルでの最短手数について考えてみたいと思ったためだ。

○9パズルの説明

9パズルとは数字の書かれたピースをスライドさせ図の状態にする遊び。一つのピースをずらすことを一手と呼び、 $n \times n$ の盤面において全盤面における最短攻略手数の最大値を M_n と呼ぶこととする。



図

○解くことができる条件

図の状態を、次のように表すこととする。

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & E \end{array} \dots \textcircled{A}$$

ただしEは空白を表す。また小文字は何らかの数字があることを表す。

これらには解くことができない盤面が存在する。解くことができる盤面は、 \textcircled{A} の状態からピースを偶数回交換することで再現できる盤面となる。

Eの移動を群における置換と見ると、 \textcircled{A} から奇数回の互換でできた盤面は、奇数手で解ける。しかし、Eは揃える前、後ともに同じ位置にいるため、必ず偶数手で揃えなくてはならない。そのため、「 \textcircled{A} の状態からピースを偶数回交換することで再現できる盤面」のみ解ける。

○名称を定める

ここで動かし方について考察する。盤面を外側から層 $L_1, L_2 \dots$ と呼ぶこととする。例えば次の盤面では

$$\begin{array}{cccc} x & x & x & x \\ x & y & y & x \\ x & y & y & x \\ x & x & x & x \end{array} \dots \textcircled{B}$$

L_1, L_2 の二つがあり、xの部分 L_1 、yの部分 L_2 となる。ここでEが上に動く、下に動く、右に動く、左に動く動き方をそれぞれU、D、R、Lと呼ぶこととする。また何も変換しないこと(=恒等変換)をeとする。そして掛け算のように、盤面の状態の後に繋げて書く。例えば

$$\textcircled{A}ULDLUR^2 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & E \\ 4 & 7 & 6 \end{array} \dots \textcircled{C}$$

である。ここで R^2 は、RRが行われたことを意味する。

○ M_3 の考察

まずは M_2 について考える。 L_1 のみとなる。この時、

$$(ULDR)^3 = (LURD)^3 = e \dots \textcircled{D}$$

であるため、 M_2 は6以下である。実際に全てのパターン(3パターン)を試すと、 $M_2 = 4$ であるとわかる。

M_3 についても考える。この時、9パズルの全ての盤面が

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & E \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ i & j & E \\ k & l & m \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & n & o \\ 7 & p & E \end{array} \rightarrow \textcircled{A}$$

という順で解かれると仮定して考える。このとき、各矢印をステップ1、2、3と呼び、その時の攻略最短手数の最大値を S_1, S_2, S_3 と呼ぶこととする。この時

$$M_3 \leq S_1 + S_2 + S_3 \dots \textcircled{E}$$

が成り立つ。この時、それぞれのパターンを全て試すことで

ステップ1 (3 3 6通り)

全てのパターンを試すと $S_1 \leq 23$

ステップ2 (2 0通り)

全てのパターンを試すと $S_2 \leq 20$

ステップ3 (3通り)

S_3 は M_2 と等しいため、 $S_3 = M_2 = 4$

よって各ステップから M_3 の値は \textcircled{E} の式から

$$M_3 \leq 47$$

よって「全ての盤面は47手以内に \textcircled{A} の状態にすることができる」と分かった。

○感想

9パズルにおける全てのパターンを試すことなく、最短手数を見積もることができた。この手法はGoogle社がルービックキューブの最短手数を見つける時にも用いられた手法で、とても強力であることが分かった。

今回は、今回の方法よりもより良い場合分けの手法や各ステップの設定によって、さらに正確な値を出したい。また群論の考え方をを用いて、最短手数を考察していきたいと思う。