

新しい積分ルーチン DICE 2.1 の開発

飛松敬二郎*

Development of the new integration routine DICE 2.1

Keijiro TOBIMATSU*

Abstract

本稿は積分領域の再帰的な均等 2 分割法により効率的なサンプリングを目指して開発中の積分ルーチン DICE 2.1 の特徴とそれを幾つかの重積分に適用して得られる結果を報告する。この方法は重積分の数値計算において特異性のない被積分関数だけでなく特異性のある被積分関数に対して有用である。

This paper reports the feature of the integration routine DICE 2.1 being developed for efficient sampling by the method evenly dividing the integration region into two parts recursively and shows the results obtained when applying the method to some definite integrals. The new method is useful for computing multiple integrals of functions with singularity as well as those of nonsingular functions.

Keywords: Automatic Integration, Numerical integration, Monte Carlo method

1 はじめに

DICE は素粒子の散乱断面積の数値積分をもっと簡単に計算したいとの願いで開発された積分ルーチンである。それは容易には叶わないがここで触れておきたい。

電子陽電子衝突実験では電子と陽電子が衝突直前に硬光子を放出する始状態輻射が起こるため衝突の重心系エネルギーが連続的に変化することが知られている。そのため実験データの解析において硬光子放出を伴う散乱断面積の正確な輻射補正計算が必要になる。

終状態に硬光子を含む 3 体以上の粒子を伴う輻射補正の散乱断面積の計算は散乱過程の不変振幅 (Feynman 振幅の和) の 2 乗を始状態の電子と陽電子の偏極の平均及び終状態の光子と生成粒子の偏極和を取り、始状態の電子と陽電子の相対速度と重心系エネルギーの二乗で割り、位相空間積分を行う [3, 5, 9]。

被積分関数は REDUCE[15], FORM[16] 等の数式処理を用いて数式で得られる。衝突前後の粒子の 4 元運動量の内積を掛け算した多項式で項数が非常に多い。

4 元運動量の保存則とビーム軸周りの対称性を考慮すると位相空間積分は 4 次元以上の多重積分に帰着する。

観測可能な素粒子は測定装置のエネルギー分解能と位置分解能に依存する実験条件を考慮の上、運動学を駆使して位相空間積分の数値計算を積分ルーチンで実行する。

電子と陽電子は質量が小さく光子の質量は 0 であるため粒子の伝搬関数に起因する質量特異性や赤外発散がある。後者はカットオフを導入して発散を除去するが被積分関数は非常に幅の狭い鋭いピークが連なる山脈を有するため多重積分の計算は困難を伴う [3]。積分ルーチンによって安定した数値を得るには積分空間の山脈がある領域を効率良くサンプリングする必要がある。

輻射補正に経験がある研究者は特異性のある領域を効果的にサンプリングする変数変換により被積分関数にヤコビアンを乗じ鋭い特異性を除去して [8, 14], 効率の良い積分ルーチン [1, 2, 6, 10] を用いて積分を行う。多種類の特異性を持つ被積分関数を積分する場合には積分空間の全ての鋭い特異性を変数変換だけで取り除くことは全く容易ではない。間違える可能性を排除できないため別の手段で確認することが重要になる。

積分ルーチン DICE は別の方法で問題解決を目指す。即ち、被積分関数の特異性を持つ領域を自動的に細分化する方法で加重サンプリングを行い積分計算を遂行するのである。DICE 1.3 は積分次元を N_{dim} として積分領域を $2^{N_{dim}}$ の小領域に分割して各小領域の積分が要請

*工学院大学 教育推進機構 基礎・教養科 情報処理研究室 准教授
Informatics Lab, Division of Liberal Arts, Kogakuin University

される精度に達するまで $2^{N_{dim}}$ 個の小領域に分割を再帰的に繰り返した後にサンプリングする [11, 12, 17]。

積分領域を $2^{N_{dim}}$ 個の小領域に再帰的に分割すると N_{dim} が増えれば小領域の個数はねずみ算式で増える。そこで小領域の増加を抑えつつ特異性を持つ積分領域を段階的に細分するための新たな分割手法を導入した。本稿はその分割方法で特異性を持つ被積分関数の重積分が自動的に計算可能かどうかを報告する。

2 DICE 2.1 の特徴

文献 [7] に 1 次元の例がある。DICE 2.1 は次元に依らず積分領域を再帰的に均等 2 分割する方法を用いる。均等 $2^{N_{dim}}$ 個分割に比べて次元数 N_{dim} の増加に伴う計算量の増加は緩和される可能性がある。

各小領域はさらに分割するか否かを定点サンプリングとランダムサンプリングによって被積分関数値を計算して分割条件の真偽を判定する。分割条件が真である場合は各軸毎に被積分関数のヒストグラムを取り、ヒストグラムの分散が最大となる軸で小領域を均等 2 分割する。領域分割の条件を DICE 1.3 と同じにしても被積分関数のヒストグラムとその分散を各軸毎に計算して均等 2 分割する軸を見出す計算を行う必要があるため計算量の増加を伴う。

DICE 2.1 は DICE 1.3 と同様に通常のモンテカルロ法の推定量と負相関変数を用いた推定量 [18] の両方が利用可能である。被積分関数の 1 次元ヒストグラム及び 2 次元散布図を作成するためのルーチンが用意されている。2 次元積分の場合には積分領域の分割の様子を Gnuplot を用いて図示可能なプロットデータ出力を得るためのルーチンが用意されている。

3 DICE 2.1 による計算結果

3.1 テスト用の重積分

● 4 重積分 J_1

$$J_1 = \int_V e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2} dV, \quad (1)$$

領域 V は $x_i \geq 0$ かつ $\sum x_i^2 \leq 1$ である。

$J_1 = 0.16299721$ に対して DICE 2.1 の結果を示す。

ERRIN=0.01%のとき 1.6299532(+0.0001556)E-01

ERRIN=0.001%のとき 1.6299405(+0.0000157)E-01

計算精度 ERRIN=0.01%の積分推定値を得た時の出力リストを図 3 に掲載すると共に 3.2 節で説明する。

● 2 重積分 J_2

$$J_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |x^2 + y^2 - 0.25| dx dy \quad (2)$$

$J_2 = 1.8630162$ に対して DICE 2.1 の結果を示す。

ERRIN=0.01%のとき 1.8630066(+0.0000076)E+00

ERRIN=0.001%のとき 1.8630044(+0.0000172)E+00

● 2 重積分 J_3

$$J_3 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy \quad (3)$$

$J_3 = 1.6449341$ に対して DICE 2.1 の結果を示す。

ERRIN=0.01%のとき 1.6444570(+0.0001590)E+00

ERRIN=0.001%のとき 1.6449382(+0.0000111)E+00

● 2 重積分 J_4

$$J_4 = \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^{\frac{1}{2}} dx dy \quad (4)$$

$J_4 = 0.5333333$ に対して DICE 2.1 の結果を示す。

ERRIN=0.01%のとき 5.3332091(+0.0002991)E-01

ERRIN=0.001%のとき 5.3333400(+0.0000138)E-01

● 3 重積分 J_5

$$J_5 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{3 - \cos(\pi x) - \cos(\pi y) - \cos(\pi z)} \quad (5)$$

$J_5 = 0.50546$ に対して DICE 2.1 の結果を示す。

ERRIN=0.01%のとき 5.0543159(+0.0004256)E-01

ERRIN=0.001%のとき 5.0543691(+0.0000485)E-01

● 3 重積分 J_6

$$J_6 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{3.75 - \cos(\pi x) - \cos(\pi y) - \cos(\pi z)} \quad (6)$$

$J_6 = 0.30781$ に対して DICE 2.1 の結果を示す。

ERRIN=0.01%のとき 3.0783575(+0.0001929)E-01

ERRIN=0.001%のとき 3.0781262(+0.0000300)E-01

● 3 重積分 J_7

$$J_7 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |x^2 + y^2 + z^2 - 0.125| dx dy dz \quad (7)$$

$J_7 = 7.0261799$ に対して DICE 2.1 の結果を示す。

ERRIN=0.01%のとき 7.0180429(+0.0005722)E-00

ERRIN=0.001%のとき 7.0184912(+0.0000699)E-00

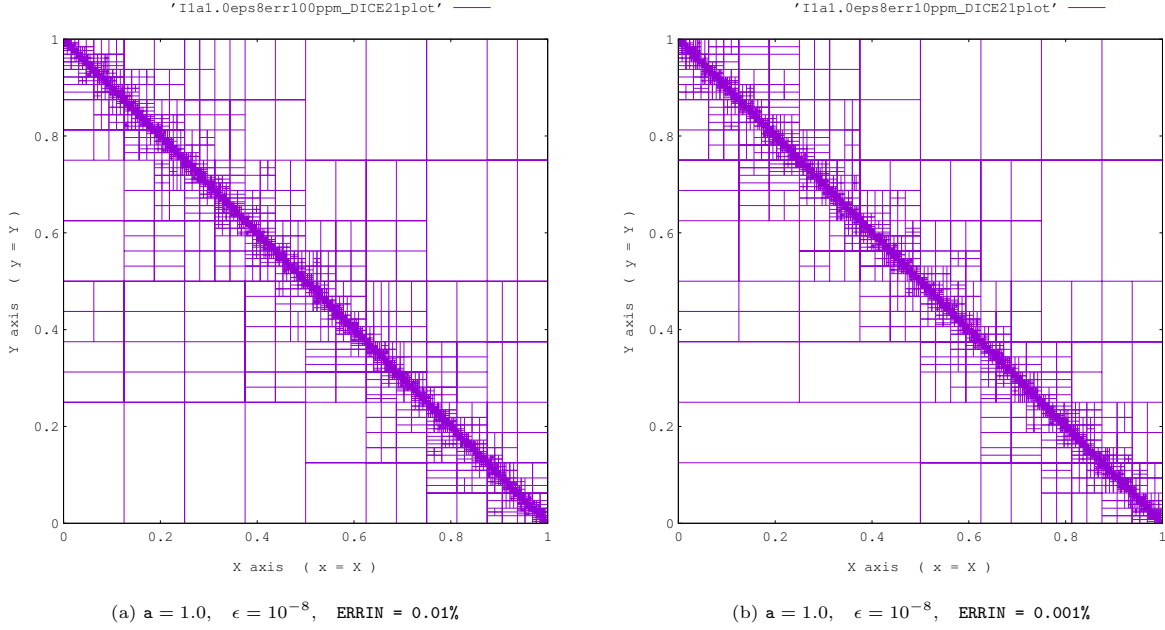


図 1: I_1 の被積分関数 $\frac{2\epsilon y}{(x+y-a)^2 + \epsilon^2}$ に対する積分領域の分割図 (Gnuplot による描画)

• 3 重積分 J_8

$$J_8 = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{dxdydz}{1 - \cos(x) \cos(y) \cos(z)} \quad (8)$$

$J_8 = 1.3932039$ に対して DICE 2.1 の結果を示す。

ERRIN=0.01%のとき $1.3926823(+0.0001385)\text{E-}00$

ERRIN=0.001%のとき $1.3931384(+0.0000121)\text{E-}00$

• 3 重積分 J_9 [13]

$$J_9 = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{dxdydz}{3 - \cos(y) \cos(z) - \cos(x) \cos(z) - \cos(x) \cos(y)} \quad (9)$$

$J_9 = 0.44822039$ に対して DICE 2.1 の結果を示す。

ERRIN=0.01%のとき $4.4810190(+0.0002519)\text{E-}01$

ERRIN=0.001%のとき $4.4821090(+0.0000433)\text{E-}01$

J_1 から J_7 は文献 [4] に、 J_8, J_9 は文献 [13] に解析表式又は数値が示されている。 J_1, J_2, J_4, J_6 は解析値と DICE 2.1 で得た積分推定値の一致が良い。 J_3, J_5, J_8, J_9 は解析値と DICE 2.1 の積分推定値の差に対して標準偏差が小さいが、これらは被積分関数が積分領域内に特異点を有しており、計算精度 0.01%の結果と比べて 0.001%の結果が一致が良いので、サンプリングの不足が原因と考えられる。 J_7 は解析的な数値と DICE 2.1 の結果には僅かながら明らかに違いがある。サンプリングの不足が原因なのか明確にすることは検討課題である。DICE 2.1 の結果は計算精度 0.01%の結果と 0.001%の結果が標準偏差の範囲内で一致する。DICE 1.3 を用いた計算でも同様の結果が得られている [17]。

3.2 斜めの直線上に特異性がある重積分 I_1

論文 [17] に示した特異性を有する重積分の中から斜めに特異性がある 2 重積分を計算してみよう。

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2\epsilon y}{(x+y-a)^2 + \epsilon^2} dxdy \quad (10)$$

$a = 1.0, \epsilon = 10^{-8}, I_1 = 3.141592$ に対して DICE 2.1 の ERRIN の値を変えて自動積分を行った結果を示す。

ERRIN=0.01%のとき $3.1414733(+0.0003066)\text{E+}00$

ERRIN=0.001%のとき $3.1416311(+0.0000311)\text{E+}00$

ERRIN の値と同程度の精度で積分推定値は一致している。2 重積分 I_1 の DICE 2.1 における積分領域の分割の様子を図 2 に (a) ERRIN=0.01% と (b) ERRIN=0.001% のプロットで示す。積分推定値と標準偏差が正常であることから積分変数 x, y が成す平面内で斜めの直線 $x+y=a$ 上に特異性がある場合でも適切な領域分割とサンプリングが行われることを図 2(a) と図 2(b) は示している。

DICE 2.1 の逐次計算の例として、附録 1. 図 3 に 3.1 節の J_1 を ERRIN=0.01%の精度で計算した出力リスト及び附録 2. 図 4 に (10) 式を ERRIN=0.001%の精度で計算したときの出力リストをそれぞれ掲載した。

逐次計算の初回 IT=0 の計算は分割レベル L の最大値 L_{\max} を 4 に初期設定しているため全ての小領域は必要に応じて $\frac{1}{2^4}$ まで分割が行われた時点でモンテカルロ法により小領域の積分推定値と分散が計算される。IT=1 以降の IT=n の計算は IT=n-1 で得られた積分推定値と分散の大きさから推定した分割レベルの上限値である Limit の値を L_{\max} に設定して計算するため、全ての小

領域は必要に応じて $2^{-\text{Limit}}$ の大きさに到達すると積分推定値と分散が計算される。

各回の積分推定値, 標準偏差, 精度は<Current>の所に出力される。<Cumulative1>と<Cumulative2>の積分推定値と標準偏差は<Current>の積分推定値と分散を各回からそれより前の回まで遡って累積して得られたものである。前者は IT=1 まで遡って, 後者は各回の L_{\max} 値と同じ L_{\max} 値が連続する回まで遡って累積して得られる。

IT=1 以降の各 IT では全ての小領域で領域分割の判定を定点サンプリングとランダムサンプリングの2段階で行う。各判定に要したサンプリングの合計数が出力リストの #sampling0 と #sampling1 に, 積分推定値と分散の計算に要したサンプリングの合計数が #sampling2 にそれぞれ印字されている。

x - y 平面の対角線上にピーク高 10^8 , 幅 10^{-8} の特異性がある (10) 式の 2 重積分に対する DICE 2.1 の数値積分には, 計算精度 10^{-5} (ERRIN=0.001%) の積分推定値, 分散, ヒストグラムと散布図, 領域分割 (図 1(b)) のプロットデータの出力を含めて, 図 4 に印字された CTIME = 22980.73sec の計算時間を要した。その際に得られたヒストグラムと散布図を附録 2. の図 5 と図 6 に掲載した。

3.3 円周上に特異性がある重積分 I_2

論文 [17] から円周上に特異性がある 2 重積分 I_2

$$I_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\epsilon y^2 \theta(1 - x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + \epsilon^2} dx dy \quad (11)$$

を a, ϵ を変えて計算する。 $\theta(x)$ は次式で定義される。

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

以下の (a) (b) (c) (d) には最初の行に a, ϵ の値と 2 重積分 I_2 の解析値を, 続いて DICE 2.1 の計算結果を示す。

(a) $a = 0.0, \epsilon = 10^{-6}, 2.1701354 \times 10^{-5}$

ERRIN=0.01% のとき 2.1701139(+0.0000143)E-05

ERRIN=0.001% のとき 2.1701358(+0.0000007)E-05

(b) $a = 0.8, \epsilon = 10^{-1}, 2.6436336 \times 10^0$

ERRIN=0.01% のとき 2.6436998(+0.0000930)E-00

ERRIN=0.001% のとき 2.6435905(+0.0000262)E-00

(c) $a = 0.8, \epsilon = 10^{-6}, 3.1582682 \times 10^0$

ERRIN=0.01% のとき 3.1579510(+0.0003110)E-00

ERRIN=0.001% のとき 3.1582323(+0.0000302)E-00

(d) $a = 1.0, \epsilon = 10^{-6}, 2.4674012 \times 10^0$

ERRIN=0.01% のとき 2.4658294(+0.0002347)E-00

ERRIN=0.001% のとき 2.4672651(+0.0000243)E-00

最終の IT 値は ERRIN=0.01% と ERRIN=0.001% に対し (a) IT=2 と IT=2, (b) IT=2 と IT=19, (c) IT=14 と IT=2, (d) IT=11 と IT=20 である。これらの積分推定値と標準偏差は最終回まで連続して同じ L_{\max} 値を持つ各 IT の積分推定値と分散を累積して得られた。(a) と (b) の ERRIN=0.01% の計算結果は要請した精度よりも精度が高い。一つ前の IT=1 で得られた積分推定値と標準偏差の大きさから要請される分割レベルの上限値 Limit が大きくなり過ぎると, それが IT=2 の L_{\max} に設定されるため, このように要請した精度よりも高い精度で計算結果が得られることがある。

(a), (b), (c) は DICE 2.1 で得られた積分推定値と標準偏差 σ の値から解析表式の値と積分推定値が 2σ の範囲で一致するので, 正しい積分推定値と標準偏差が得られるように領域分割とサンプリングが行われた。

(d) は解析表式の値と積分推定値は 6σ 以上の有意な差があるので理由を考えてみよう。 $a = 1.0, \epsilon = 10^{-6}$ より (11) 式の被積分関数は $x^2 + y^2 = 1$ の円周上に鋭いピークがあり, 円の外側 $x^2 + y^2 > 1$ の領域は関数 $\theta(1 - x^2 - y^2)$ が 0 になる。 x - y 平面上の $x^2 + y^2 = 1$ の円周に垂直な 10^6 のピークを持つ崖が円筒の如く聳え立っている (文献 [17] Fig.2(c) 参照)。円周を僅かに含む小領域ではサンプリング不足で円周が捉えられず, その領域の積分推定値と標準偏差が両方共 0 又は非常に小さくなる。そのような小領域が幾つもあるれば (11) 式の積分推定値と標準偏差は両方小さくなるので, その結果有意な差が生じたと考えられなくもない。

図 2 は (a), (b), (c), (d) の計算における積分領域の分割の様子を示している。 a, ϵ の値に応じて, DICE 2.1 の均等 2 分割法で自動的に領域分割が行われている様子が確認できる。

4 まとめ

DICE 2.1 の新しい領域分割の方法とそれを幾つかの重積分に適用したときの計算結果を示した。これらの結果が示すように DICE 2.1 は特異性のない被積分関数だけでなく特異性を有する被積分関数の重積分を自動的に数値計算して, ある程度信頼できる結果が得られることが分かった。

5 終わりに

DICE 2.1 を他の重積分にも活用できるかどうかさらに確認したいと考えている。また別の機会に報告できれば幸いである。

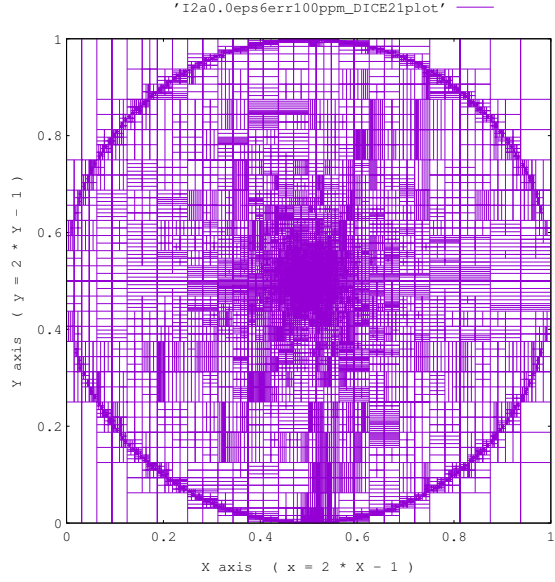
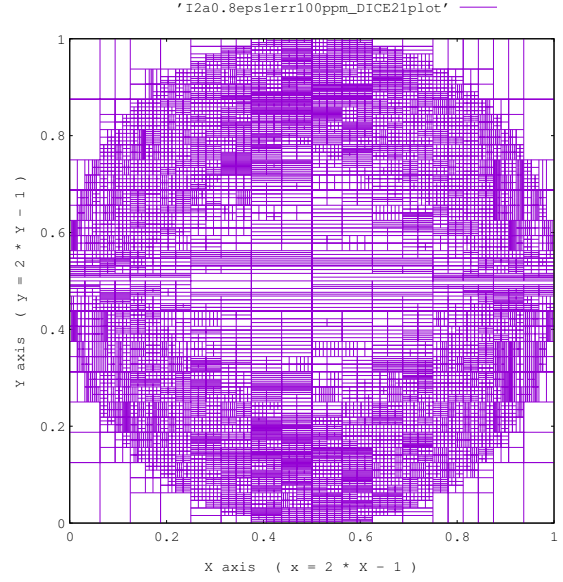
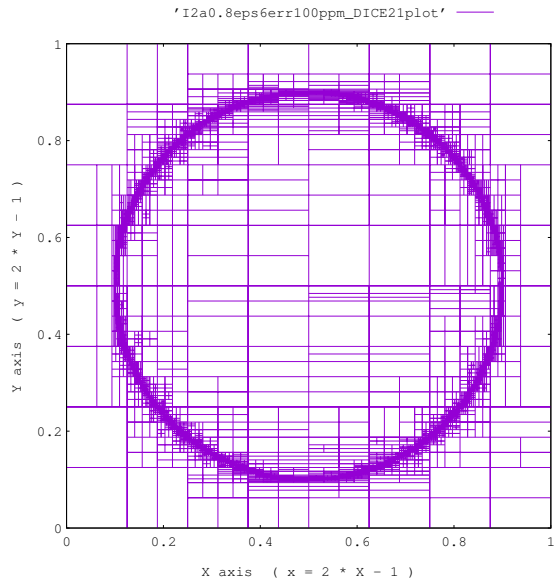
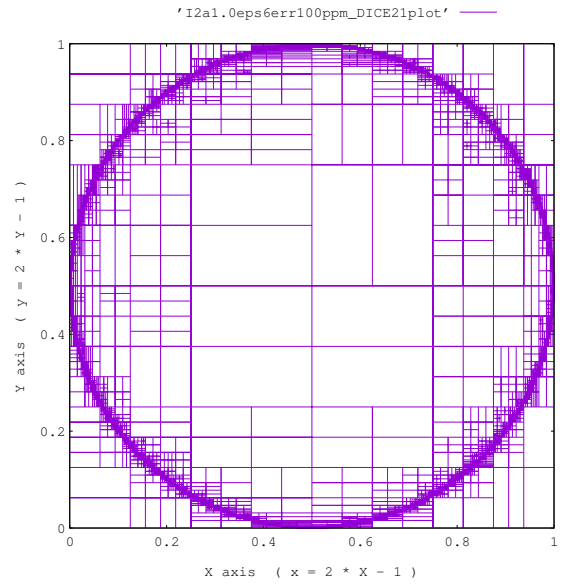
(a) $a = 0.0$, $\epsilon = 10^{-6}$, $\text{ERRIN} = 0.01\%$ (b) $a = 0.8$, $\epsilon = 10^{-1}$, $\text{ERRIN} = 0.01\%$ (c) $a = 0.8$, $\epsilon = 10^{-6}$, $\text{ERRIN} = 0.01\%$ (d) $a = 1.0$, $\epsilon = 10^{-6}$, $\text{ERRIN} = 0.01\%$

図 2: I_2 の被積分関数 $\frac{\epsilon y^2 \theta(1 - x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + \epsilon^2}$ に対する積分領域の分割図 (Gnuplot による描画)

6 謝辞

プログラム開発及び計算には本学の学術情報センター工手の泉に設置された共用の演算サーバーを活用させて頂いた。センター所長の馬場健一先生、演算サーバーの整備保守を担当されている職員の方々に感謝したい。

最後に研究報告に発表する機会を頂いた編集委員会に感謝したい。

参考文献

- [1] G.P. Lepage, *A New Algorithm for Adaptive Multidimensional Integration*, Journal of Computational Physics 27 (1978) 192-203.
- [2] G.P. Lepage, *VEGAS: Adaptive Multidimensional Integration Program*, CLNS-80/447 (March 1980).
- [3] 島田徳三, 高エネルギー $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 過程への輻射補正 (*in Japanese*), 明治大学科学技術研究所紀要 第22冊 No.3(1983)1-39.
- [4] P.J. Davis and P. Rabinowitz, *METHODS OF NUMERICAL INTEGRATION*, Second Ed., Academic Press (1984) 452-455.
- [5] Y. Shimizu, *Introduction to Radiative Corrections for Young Experimentalists (in Japanese)*, KEK Report 84-23 (1985) 1-124.
- [6] S. Kawabata, *Multi-dimensional integration and event generation package BASES/SPRING*, Computer Physics Communications 41 (1986) 127.
- [7] 森正武, 12.3 適応的自動積分のプログラム, FORTRAN77 数値計算プログラミング (増補版) 岩波書店 (1987) 195-204.
- [8] K. Tobimatsu and Y. Shimizu, *Radiative Bhabha Scattering in Special Configurations with Missing Final e^+ and/or e^-* , Computer Physics Communications 55 (1989) 337-358.
- [9] J. Fujimoto, et. al., *Radiative Correction to e^+e^- Reactions in Electroweak theory*, Progress of Theoretical Physics Supplement 100 (1990).
- [10] S. Kawabata, *A new version of the multi-dimensional integration and event generation package BASES/SPRING*, Computer Physics Communications 88 (1990) 309-326.
- [11] K. Tobimatsu and S. Kawabata, *A New Algorithm for Numerical integration*, Research Reports of Kogakuin Univ. No.72 (1992) 297-306.
- [12] K. Tobimatsu and S. Kawabata, *Multi-dimensional integration routine DICE*, Research Reports of Kogakuin Univ. No.85 (1998) 7-27.
- [13] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Product*, Sixth Ed., Academic Press (2000) 608.
- [14] K. Tobimatsu and M. Igarashi, *Precise formula for the radiative Bhabha scattering*, Computer Physics Communications 120 (2001) 105-116.
- [15] Anthony C. Hearn, *REDUCE User's Manual Version 3.8*, <http://www.reduce-algebra.com/reduce38-docs/reduce.pdf> (2004) 1-217.
- [16] J.A.M. Vermaseren, et. al., *FORM version 4.2 Reference Manual*, <https://www.nikhef.nl/~form/maindir/documentation/reference/online/online.html>, 4-oct-2018.
- [17] K. Tobimatsu, *Performance test of the integration routine DICE*, Research Reports of Kogakuin Univ. No.127 (2020) 7-16.
- [18] K. Tobimatsu, *Introduction of antithetic variates to integration routine DICE*, Research Reports of Kogakuin Univ. No.130 (2022) 41-47.

附録 1. $J_1 = \int_V e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2} dV$ の計算結果

```

auto.f IFUNC = 1, ERRIN = 0.1E-01, ANTITH = T
auto.f ( J1 ), NDIM = 4, ANTITH = T, HSTSCT = T
JGRID, JSAVE, JMONIT, JCOMPR = 0, 0, 0, 0
*****
*
*      D      I      C      E      *
*      Version      2.1Vh      *
*              June 1993      *
*      Revised      Aug. 2022      *
*
*****

*****
*
*      JFLAG = 0      CPUMIN = 50000.0min. *
*      NODEMX = 512      NDIM = 4 *
*      ITMAX = 500      ERRIN = 0.01000 % *
*      NSAMPL = 100      JGRID = 0 *
*
*      XL( 1) = 0.00E+00 XU( 1) = 1.00E+00 *
*      XL( 2) = 0.00E+00 XU( 2) = 1.00E+00 *
*      XL( 3) = 0.00E+00 XU( 3) = 1.00E+00 *
*      XL( 4) = 0.00E+00 XU( 4) = 1.00E+00 *
*
*****

=====
      < Current >      < Cumulative 1 >      < Cumulative 2 >
IT      Estim._Error  Exp10  Acc %      Estim._Error  Exp10  Acc %      Estim._Error  Exp10  Acc %
=====
0  1.6507419_0.0300715E-01  1.821698
1  1.6314601_0.0017917E-01  0.109824  1.6314601_0.0017917E-01  0.109824  1.6314601_0.0017917E-01  0.109824
2  1.6291600_0.0004641E-01  0.028487  1.6293046_0.0004493E-01  0.027574  1.6291600_0.0004641E-01  0.028487
3  1.6305340_0.0004696E-01  0.028800  1.6298922_0.0003246E-01  0.019917  1.6298389_0.0003301E-01  0.020253
4  1.6301482_0.0004645E-01  0.028497  1.6299762_0.0002661E-01  0.016325  1.6299427_0.0002691E-01  0.016508
5  1.6298010_0.0004635E-01  0.028437  1.6299327_0.0002308E-01  0.014158  1.6299070_0.0002327E-01  0.014277
6  1.6291222_0.0004607E-01  0.028276  1.6297701_0.0002063E-01  0.012660  1.6297474_0.0002077E-01  0.012745
7  1.6297090_0.0004699E-01  0.028834  1.6297603_0.0001889E-01  0.011592  1.6297412_0.0001900E-01  0.011657
8  1.6308304_0.0004784E-01  0.029333  1.6299046_0.0001757E-01  0.010780  1.6298895_0.0001766E-01  0.010833
9  1.6302198_0.0004673E-01  0.028664  1.6299437_0.0001645E-01  0.010090  1.6299308_0.0001652E-01  0.010133
10 1.6301301_0.0004646E-01  0.028502  1.6299645_0.0001550E-01  0.009512  1.6299532_0.0001556E-01  0.009548

=====

IT day/hh:mm:secnd Lmin Lmax Limit  #sampling0  #sampling1  #sampling2
=====
0  0/ 0: 0: 0.01  4  4  10  255.00000  3000.0000  1600.0000
1  0/ 0: 0: 0.02  5  10  13  13107.000  154200.00  77200.000
2  0/ 0: 0: 0.22  5  13  13  78523.000  923800.00  462000.00
3  0/ 0: 0: 0.54  5  13  13  85255.000  1003000.0  501600.00
4  0/ 0: 0: 0.74  6  13  13  81447.000  958200.00  479200.00
5  0/ 0: 0: 0.95  5  13  13  83385.000  981000.00  490600.00
6  0/ 0: 0: 1.12  5  13  13  80257.000  944200.00  472200.00
7  0/ 0: 0: 1.36  5  13  13  88315.000  1039000.0  519600.00
8  0/ 0: 0: 1.60  5  13  13  91511.000  1076600.0  538400.00
9  0/ 0: 0: 1.78  5  13  13  84609.000  995400.00  497800.00
10 0/ 0: 0: 1.96  5  13  13  81311.000  956600.00  478400.00

Total: 767975.00  9035000.0  4518600.0

**** Execution completely finished ****
CTIME = 1.96sec

```

図 3: 4 重積分 $J_1 = \int_V e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2} dV$, 積分領域 $V: x_i \geq 0$ かつ $\sum x_i^2 \leq 1$ の DICE 2.1 による自動積分の出力リスト。

数値積分の計算精度 $\text{ERRIN}=0.01\%$, 小領域のランダムサンプリング数 $\text{NSAMPL}=100$ 及び負相関変量を用いた積分推定量 [18] を使用した。

附録 2. $I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2\varepsilon y}{(x+y-a)^2 + \varepsilon^2} dx dy$ の計算結果

exam1.f A = 1.0, EPS = 0.1E-07, ANTITH = T

```

*****
*
*           D       I       C       E
*       Version      2.1Vh
*           June 1993
*       Revised Aug. 2022
*
*****

*****
*
* JFLAG =      0      CPUMIN = 50000.0min.
* NODEMX =    512      NDIM =      2
* ITMAX =    200      ERRIN = 0.00100 %
* NSAMPL =    100      JGRID =      1
*
* XL( 1) = 0.00E+00  XU( 1) = 1.00E+00
* XL( 2) = 0.00E+00  XU( 2) = 1.00E+00
*
*****

=====
IT      < Current >      < Cumulative 1 >      < Cumulative 2 >
      Estim._Error Exp10 Acc %      Estim._Error Exp10 Acc %      Estim._Error Exp10 Acc %
=====
0  5.6528090_2.3876014E-05 42.237434
1  4.0957808_1.7431776E+00 42.560326  4.0957808_1.7431776E+00 42.560326  4.0957808_1.7431776E+00 42.560326
2  3.1415700_0.0000533E+00 0.001696  3.1415700_0.0000533E+00 0.001696  3.1415700_0.0000533E+00 0.001696
3  3.1417365_0.0001354E+00 0.004310  3.1415923_0.0000496E+00 0.001578  3.1417365_0.0001354E+00 0.004310
4  3.1417615_0.0001354E+00 0.004310  3.1416123_0.0000465E+00 0.001482  3.1417490_0.0000958E+00 0.003048
5  3.1413469_0.0001354E+00 0.004310  3.1415843_0.0000440E+00 0.001401  3.1416150_0.0000782E+00 0.002489
6  3.1416283_0.0001354E+00 0.004310  3.1415885_0.0000419E+00 0.001333  3.1416183_0.0000677E+00 0.002155
7  3.1415394_0.0001354E+00 0.004310  3.1415842_0.0000400E+00 0.001273  3.1416025_0.0000606E+00 0.001928
8  3.1415804_0.0001354E+00 0.004311  3.1415839_0.0000384E+00 0.001221  3.1415988_0.0000553E+00 0.001760
9  3.1417793_0.0001354E+00 0.004311  3.1415984_0.0000369E+00 0.001175  3.1416246_0.0000512E+00 0.001629
10 3.1414857_0.0001354E+00 0.004311  3.1415906_0.0000356E+00 0.001133  3.1416072_0.0000479E+00 0.001524
11 3.1418011_0.0001354E+00 0.004310  3.1416042_0.0000344E+00 0.001096  3.1416288_0.0000451E+00 0.001437
12 3.1414313_0.0001354E+00 0.004310  3.1415937_0.0000334E+00 0.001062  3.1416090_0.0000428E+00 0.001363
13 3.1416022_0.0001354E+00 0.004310  3.1415942_0.0000324E+00 0.001031  3.1416084_0.0000408E+00 0.001300
14 3.1414424_0.0001354E+00 0.004310  3.1415860_0.0000315E+00 0.001003  3.1415946_0.0000391E+00 0.001244
15 3.1417449_0.0001354E+00 0.004310  3.1415941_0.0000307E+00 0.000977  3.1416061_0.0000376E+00 0.001195
16 3.1416090_0.0001354E+00 0.004310  3.1415949_0.0000299E+00 0.000953  3.1416063_0.0000362E+00 0.001152
17 3.1417414_0.0001354E+00 0.004311  3.1416017_0.0000292E+00 0.000930  3.1416153_0.0000350E+00 0.001113
18 3.1416042_0.0001354E+00 0.004310  3.1416018_0.0000286E+00 0.000909  3.1416146_0.0000339E+00 0.001078
19 3.1417866_0.0001354E+00 0.004310  3.1416097_0.0000280E+00 0.000890  3.1416248_0.0000328E+00 0.001045
20 3.1417976_0.0001354E+00 0.004310  3.1416174_0.0000274E+00 0.000871  3.1416344_0.0000319E+00 0.001016
21 3.1415729_0.0001354E+00 0.004311  3.1416156_0.0000268E+00 0.000854  3.1416311_0.0000311E+00 0.000989

=====
IT day/hh:mm:secnd Lmin Lmax Limit #sampling0 #sampling1 #sampling2
=====
0  0/ 0: 0: 0.01 4 4 21 75.000000 3000.0000 1600.0000
1  0/ 0: 0: 0.35 7 21 48 671885.00 26875400. 13437800.
2  0/ 0:27:21.03 4 48 47 0.10866986E+10 0.43467945E+11 0.21733973E+11
3  0/ 0:45:44.46 5 47 47 0.77252378E+09 0.30900951E+11 0.15450476E+11
4  0/ 1: 4:10.16 4 47 47 0.77256160E+09 0.30902464E+11 0.15451232E+11
5  0/ 1:22:29.44 5 47 47 0.77252918E+09 0.30901167E+11 0.15450584E+11
6  0/ 1:40:46.69 5 47 47 0.77246968E+09 0.30898787E+11 0.15449394E+11
7  0/ 1:59:12.84 4 47 47 0.77252834E+09 0.30901134E+11 0.15450567E+11
8  0/ 2:17:54.03 4 47 47 0.77254648E+09 0.30901859E+11 0.15450930E+11
9  0/ 2:36:35.02 4 47 47 0.77253164E+09 0.30901265E+11 0.15450633E+11
10 0/ 2:55:34.92 4 47 47 0.77255782E+09 0.30902313E+11 0.15451156E+11
11 0/ 3:14:41.47 4 47 47 0.77248674E+09 0.30899469E+11 0.15449735E+11
12 0/ 3:33:43.72 4 47 47 0.77253086E+09 0.30901234E+11 0.15450617E+11
13 0/ 3:52:52.34 4 47 47 0.77254950E+09 0.30901980E+11 0.15450990E+11
14 0/ 4:11:29.78 4 47 47 0.77253846E+09 0.30901538E+11 0.15450769E+11
15 0/ 4:30:16.66 4 47 47 0.77252438E+09 0.30900975E+11 0.15450488E+11
16 0/ 4:49: 4.91 4 47 47 0.77256966E+09 0.30902786E+11 0.15451393E+11
17 0/ 5: 7:50.62 4 47 47 0.77252868E+09 0.30901147E+11 0.15450574E+11
18 0/ 5:26:38.29 4 47 47 0.77247954E+09 0.30899181E+11 0.15449591E+11
19 0/ 5:45:23.93 4 47 47 0.77257874E+09 0.30903149E+11 0.15451575E+11
20 0/ 6: 4: 8.31 4 47 47 0.77252132E+09 0.30900853E+11 0.15450426E+11
21 0/ 6:23: 0.73 4 47 47 0.77247406E+09 0.30898963E+11 0.15449481E+11

Total: 0.15765401E+11 0.63061604E+12 0.31530802E+12

***** Execution completely finished *****
CTIME = 22980.73sec

```

図 4: 2 重積分 $I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2\varepsilon y}{(x+y-a)^2 + \varepsilon^2} dx dy$, $a = 1.0$, $\varepsilon = 10^{-8}$ の DICE 2.1 による自動積分の出力リスト。数値積分の計算

精度 ERRIN=0.001%, 小領域内のランダムサンプリング数 NSAMPL=100 及び 負相関変量を用いた積分推定量 [18] を使用した。

1

```

===== Contents of histograms & scatter plots =====

(1) Buffer information
    Temporal buffer      =    5540* 512 words * 16byte =    43.00 Mbyte
    Accumulation buffer =    5540      words * 16byte =    86.00 Kbyte
    Used buffer area    =     967      words

(2) Contents of Histograms
    Allowed # of histograms =    4
    # of histograms defined =    2

    No.  ID    X_min      X_max  Xbins
      1   1  0.000E+00  1.000E+00  30
      2   2  0.000E+00  1.000E+00  30

    No.  ID  # of sampling  F_min*dx  F_max*dx  Sum_Fi*dx
      1   1  0.293560610E+12  3.49044E-03  2.05961E-01  3.14163E+00
      2   2  0.293560610E+12  3.49044E-03  2.05961E-01  3.14163E+00

(3) Contents of Scatterplots
    Allowed # of scatterplots =    6
    # of scatterplots defined =    1

    No.  ID    X_min      X_max  Xbins      Y_min      Y_max  Ybins
      1   1  0.000E+00  1.000E+00  30      0.000E+00  1.000E+00  30

    No.  ID  # of sampling  F_min*dx*dy  F_max*dx*dy  Sum_Fi*dx*dy
      1   1  0.293560610E+12  4.23214E-13  2.05961E-01  3.14163E+00

Hist.ID      1 : X(1) Distribution

      x      dI/dx      sampling  (e+0)  1.24      2.48      3.72      4.96      6.20
(e+0) Underflow  0.000e+0
0.000  6.179e+0  9.839e+9  |*****
0.033  5.970e+0  9.838e+9  |*****
0.067  5.760e+0  9.838e+9  |*****
0.100  5.550e+0  9.840e+9  |*****
0.133  5.341e+0  9.839e+9  |*****
0.167  5.131e+0  9.839e+9  |*****
0.200  4.922e+0  9.839e+9  |*****
0.233  4.712e+0  9.839e+9  |*****
0.267  4.503e+0  9.839e+9  |*****
0.300  4.293e+0  9.839e+9  |*****
0.333  4.084e+0  9.839e+9  |*****
0.367  3.875e+0  9.834e+9  |*****
0.400  3.665e+0  9.776e+9  |*****
0.433  3.456e+0  9.776e+9  |*****
0.467  3.247e+0  9.775e+9  |*****
0.500  3.037e+0  9.775e+9  |*****
0.533  2.827e+0  9.776e+9  |*****
0.567  2.618e+0  9.774e+9  |*****
0.600  2.408e+0  9.775e+9  |*****
0.633  2.199e+0  9.775e+9  |*****
0.667  1.990e+0  9.776e+9  |*****
0.700  1.780e+0  9.775e+9  |*****
0.733  1.571e+0  9.775e+9  |*****
0.767  1.361e+0  9.774e+9  |*****
0.800  1.152e+0  9.774e+9  |*****
0.833  9.425e-1  9.770e+9  |*****
0.867  7.330e-1  9.752e+9  |*****
0.900  5.236e-1  9.746e+9  |****
0.933  3.142e-1  9.746e+9  |***
0.967  1.047e-1  9.407e+9  |*
(e+0) Overflow  0.000e+0
      (e+0)  1.24      2.48      3.72      4.96      6.20
Linear Scale indicated by "*"

```

図 5: 2 重積分 $I_1(x, y) = \int_0^x \int_0^y \frac{2\varepsilon y'}{(x' + y' - a)^2 + \varepsilon^2} dx' dy'$, $x = y = a = 1.0$, $\varepsilon = 10^{-8}$ の DICE 2.1 による自動積分で生成された $\frac{dI_1(x, y)}{dx}$ 分布。計算精度 ERRIN=0.001%, 小領域内のランダムサンプリング数 NSAMPL=100 及び 負相関変量を用いた積分推定量 [18] を使用した。

```
Scat.ID      1 : X(1)-X(2) Plot
E+00
+-----+
0.967 I*. . . . .I
0.933 I.*. . . .I
0.900 I..*. . . .I
0.867 I...*. . . .I
0.833 I....9. . . .I
0.800 I.....9. . . .I
0.767 I.....8. . . .I
0.733 I.....8. . . .I
0.700 I.....8. . . .I
0.667 I.....7. . . .I
0.633 I.....7. . . .I
0.600 I.....6. . . .I
0.567 I.....6. . . .I
0.533 I.....6. . . .I
0.500 I.....5. . . .I
0.467 Y I.....5. . . .I
0.433 I.....5. . . .I
0.400 I.....4. . . .I
0.367 I.....4. . . .I
0.333 I.....3. . . .I
0.300 I.....3. . . .I
0.267 I.....3. . . .I
0.233 I.....2. . . .I
0.200 I.....2. . . .I
0.167 I.....2. . . .I
0.133 I.....1. . . .I
0.100 I.....1. . . .I
0.067 I.....I
0.033 I.....I
0.000 I.....I
Lowedge +-----+
X
L
ooooooooooooooooooooooooooooooooooooo
w..... E
e000111222333444555666777888999 +
d0360360360360360360360360360360 o
g037037037037037037037037037037 0
e
```

図 6: 2 重積分 $I_1(x, y) = \int_0^x \int_0^y \frac{2\varepsilon y'}{(x' + y' - a)^2 + \varepsilon^2} dx' dy'$, $x = y = a = 1.0$, $\varepsilon = 10^{-8}$ の DICE 2.1 による自動積分で生成された $\frac{dI_1(x, y)}{dy}$ 分布, $\frac{d^2 I_1(x, y)}{dxdy}$ 分布。計算精度 ERRIN=0.001%, 小領域内のランダムサンプリング数 NSAMPL=100 及び負相関変量を用いた積分推定量 [18] を使用した。