

規則的な無限連分数について

東京都立戸山高等学校 SSⅡ数学 松田周

1.目的

無限連分数の和の部分の数字を1ごとに变化させ、その場合における連分数の収束値など、いろいろな値について調べる。

2.前提知識

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{\ddots + \frac{b_n}{a_n + \ddots}}}}$$

という形の連分数において n が無限に続くものを無限連分数という。そしてすべての自然数 k に対して $b_k = 1$ であるものを正則連分数といい、今回はこれを用いる。そして、上のような形の正則連分数を $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ のように表すこととする。

3.方法

連分数 $[1; 2, 3, 4, 5, \dots]$ について以下の実験を行う。
(i) この連分数を $[1], [1; 2], [1; 2, 3]$ のように順に1ずつ区切って値を調べ、それがどういう値に近づいていくか（または発散するか）を調べる。
(ii) 変数 x でこの連分数を打ち止めたときのグラフの形を考えてみる。この際、 $[x], [x - 1; x], [x - 2; x - 1, x]$ の連分数を左から $C_0(x), C_1(x), C_2(x), \dots, C_k(x), \dots$ のようにおいて、 $y = C_k(x)$ のグラフを描画する。

4.仮説

- ①この連分数は収束する。
- ②(ii)で、グラフはそれぞれ似た概形をもつ。

6.考察

- (i) 計算やグラフから考えると、この連分数はある値 $1.4331274\dots$ に近づいているようであったので、仮説①はほとんど確実に正しそうであった。しかし、この値がどういった特徴を持つ値かはわからなかった。
- (ii) 仮説②はほとんど正しかった。グラフは $k \leq 5$ までは偶奇で概形が変わっているが、 $k \geq 6$ ではほとんど概形同じだった。また、特に x の値が大きくなればなるほど(小さくなればなるほど)、グラフが $y = x - k$ に近づいていた。このグラフの規則性が分かれば、(i)で求めた収束値を計算で求めることができそうだと考えた。

7.今後の展望・参考文献

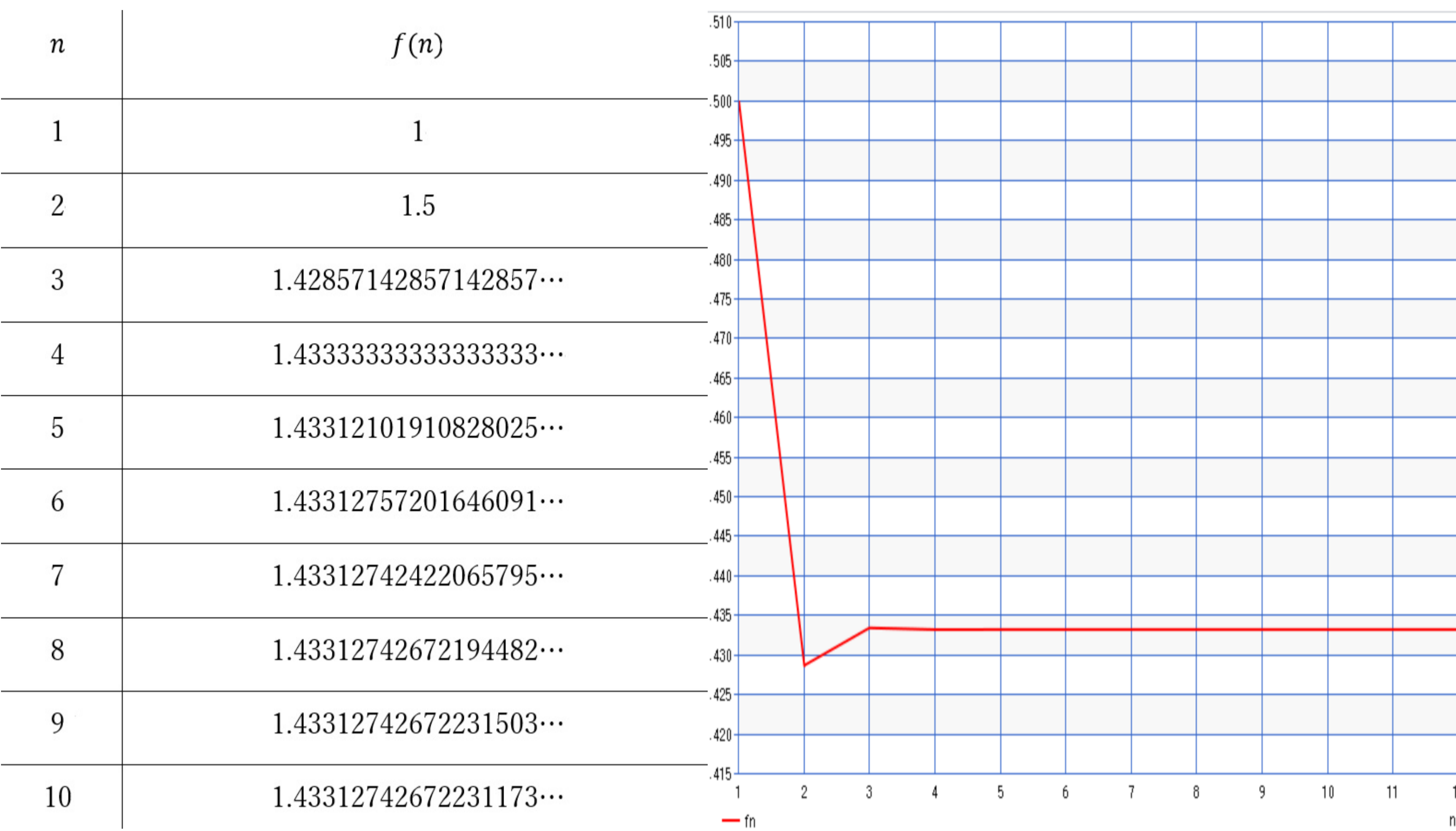
仮説はある程度正しく、グラフの形も規則的だったが、実際この値がどういう意味をもつかが詳しく分からなかったので、もう少し違う観点からこの連分数について切り込むことが必要だと思った。また、実験数が少なく、正確性に欠けているのでもう少し実験数を増やして正確な値を出したい。(ii)でのグラフの規則性も詳しく調べていきたい。

参考文献ー有理数と無理数のはざまー連分数についてー <http://kanielabo.org> >...pdf
無理数の連分数展開 <https://ocw.Nagoya-u.jp> >...pdf 循環連分数と二次方程式 <http://www.ms.u-Tokyo.ac.jp> >...pdf
計算・グラフの出力ーkeisan...生活や実務に役立つ計算サイト
GeoGebra...関数グラフ

5.結果

$$f(n) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \ddots}}}}$$

($a_0 = 1, a_n = n + 1$)
において、 $f(n)$ の値とグラフは次のようになった。



(スペースの都合上 $n = 10$ 以降は省略した。)

また、(ii)において、グラフは以下のようなになった。

