ソファ問題

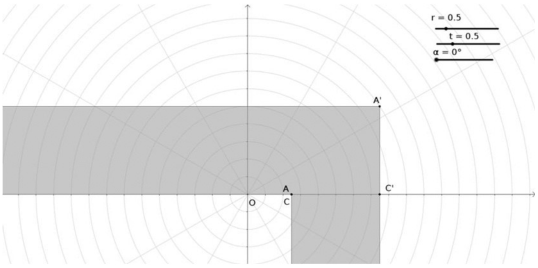
２年Ｂ組　平野琉果

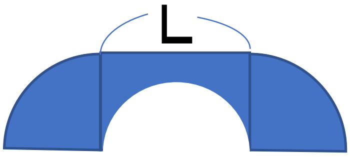
ソファ問題とは

幅１の９０度に曲がった通路を通すことのできるソファの最大面積はいくらか？という問いをソファ問題という。数学の未解決問題の一つ。

考え方

ソ フ ァ で は な く 通 路 を 移 動 さ せ る 。





上のように、四分円と長方形から半円をくりぬいた図形ができる。この面積が最大になるＬの長さは微分または平方完成によって求められ、面積２/π＋π/２になる。これをハマースレー型ソファという。これは最大面積ではない。

←上の図は点Ｏを軸に回転移動させただけ。実際の最大面積を求めるためには回転移動と平行移動を組み合わせることがカギとなる

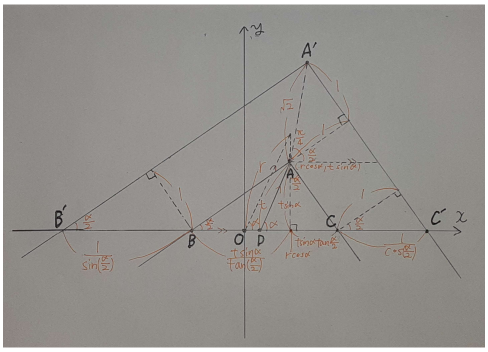
結果

AB

$x=(r-t)\cos\alpha+\frac{1}{2}(r-t)\cos 2\alpha-\frac{1}{2}(r+t)$

$y=(r-t)cos^2\alpha\tan\frac{\alpha}{2}-t\cos\tan\frac{\alpha}{2}-r\tan\frac{\alpha}{2}+t\sin\alpha+\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

包絡線をパラメータ表示するところまでいったので、求めた包絡線の方程式を積分することによって、ソファの面積が求められると考えられる。



A$(r\cos\alpha, t\sin\alpha)$

B$\left(r\cos\alpha-\frac{t\sin\alpha}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)},0\right)$

C$\left(r\cos\alpha+t\sin\alpha\tan\frac{\alpha}{2}\right)$

A'$\left(r\cos\alpha+\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right),\right.$
$\left.t\sin\alpha+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

B'$\left(r\cos\alpha-\frac{t\sin\alpha}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)},0\right)$

C'$\left(r\cos\alpha+t\sin\alpha\tan\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)},0\right)$

点Dはｘ軸上を∠ADC＝２∠ABCとなるように動く。ｒ≠ｔ。ｒ，ｔは定数。（https://math.stackexchange.com/questions/1787466/modelling-the-moving-sofa参考）

このように、xy 座標平面上に表すことができる。これをｒ＝ｔにすると先ほどのハマースレー型ソファになる。

ここから直線 AB：$y-\tan\frac{\alpha}{2}x+r\cos\alpha\tan\frac{\alpha}{2}-t\sin\alpha=0$

A'B':$y-\tan\frac{\alpha}{2}x+r\cos\alpha\tan\frac{\alpha}{2}-t\sin\alpha-\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=0$　が求められ、

αをパラメータとして $0\leqq\alpha\leqq\pi$ の範囲で包絡線を考え

参考文献

https://www.uh.edu/engines/epi3234.htmhttps://www.math.ucdavis.edu/~romik/data/uploads/papers/sofa.pdf