フィボナッチ数列一般項の公式に関する論理展開　　　1－F　28　寺澤悠人

１．動機　フィボナッチ数列は 1,1,2,3,5,8,13,21,・・・ と自然数のみで構成されているのに対し、一般項には無理数が含まれている。そのため私は有理数のみで表現することにした。

２．計算過程

まず、フィボナッチ数列の一般項とは次の式のことである。（ビネの公式と呼ばれている。）

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

この式を展開すると

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{\sqrt{5}\times 2^n} \quad \cdots ①$$

また、二項展開を用いると $(a+b)^n - (a-b)^n$ は次のように計算できる。

$$\begin{array}{rl}
 & (a+b)^n = {}_nC_0a^{n-0}b^0 + {}_nC_1a^{n-1}b^1 + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + {}_nC_3a^{n-3}b^3 + \cdots + {}_nC_na^0b^n \\
-) & (a-b)^n = {}_nC_0a^{n-0}b^0 - {}_nC_1a^{n-1}b^1 + {}_nC_2a^{n-2}b^2 - {}_nC_3a^{n-3}b^3 + \cdots \begin{cases} -{}_nC_na^0b^n\ (n=2k+1) \\ +{}_nC_na^0b^n\ (n=2k) \end{cases} \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^n-(a-b)^n &= 2{}_nC_1a^{n-1}b^1 + 2{}_nC_3a^{n-3}b^3 + 2{}_nC_5a^{n-5}b^5 + \cdots \begin{cases} +2{}_nC_na^0b^n\ (n=2k+1) \\ +2{}_nC_{n-1}a^1b^{n-1}\ (n=2k) \end{cases} \\
&= \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} 2{}_nC_{2k-1}a^{n-(2k-1)}b^{2k-1}
\end{aligned}$$

したがって a=1,b=$\sqrt{5}$を代入すると

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} 2{}_nC_{2k-1}\sqrt{5}^{2k-1} \quad \cdots ②$$

よって、②を①に代入すると

$$F_n = \frac{\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} {}_nC_{2k-1}5^{k-1}}{2^{n-1}} \quad \cdots ③$$

そして、${}_nC_{2k-1} = {}_nC_{n-2k+1}$の変換を行うことで③の式は、$2k-1 \leq \left[\frac{n}{2}\right]$を境に、次のように簡略化することができる。

n=8 の時　$$F_8 = \frac{1}{2^7}\left({}_8C_15^0 + {}_8C_35^1 + \underline{{}_8C_55^2 + {}_8C_75^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2^7}\left({}_8C_15^0 + {}_8C_35^1 + \underline{{}_8C_35^2 + {}_8C_15^3}\right)$$

しかし、この変換を行うことによって場合分けをする必要が出てくる。その理由を、例を挙げて説明しようと思う。

n=9 の時　$$F_9 = \frac{1}{2^8}\left({}_9C_15^0 + {}_9C_35^1 + {}_9C_45^2 + {}_9C_25^3 + {}_9C_05^4\right)$$

n=10 の時　$$F_{10} = \frac{1}{2^9}\left({}_{10}C_15^0 + {}_{10}C_35^1 + {}_{10}C_55^2 + {}_{10}C_35^3 + {}_{10}C_15^4\right)$$

n=11 の時　$$F_{11} = \frac{1}{2^{10}}\left({}_{11}C_15^0 + {}_{11}C_35^1 + {}_{11}C_55^2 + {}_{10}C_45^3 + {}_{10}C_25^4 + {}_{10}C_05^5\right)$$

これらの$2k-1 \leq \left[\frac{n}{2}\right]$の境を比較するために、2k―１の数列を考えると

1,　3,　3,　1　　　(n=8)

1,　3,　4,　2,　0　(n=9)

1,　3,　5,　3,　1　(n=10)

1,　3,　5,　4,　2,　0　(n=11)

この数列から読み取れる性質は、

n=8 の時　$2k-1 \leq \left[\frac{n}{2}\right]$を満たす最大の 2k―1（以後 M と表すことにする）を境に中心から左右対称の数列になっている。

n=9 の時（１から M までの数列）＋（０から M＋１までの数列）となっている。

n=10 の時　n=8 の数列に M を足した数列となっている。

n=11 の時（１から M までの数列）＋（０から M―１までの数列）となっている。

また、12 以降の項も同じような性質を持つので、③の公式は n を４で割った余りの４通りで場合分けをする必要があることが分かった。よって、n≡0,1,2,3（mod4）の４通りについて③の公式を変形させることにする。なお$\frac{n}{4} \geq 1$より n≥４である。

n≡0(mod4)の時

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{2^{n-1}}\left({}_nC_15^0 + {}_nC_35^1 + \cdots + {}_nC_M5^{\frac{n}{4}-1} + {}_nC_M5^{\frac{n}{4}} + \cdots + {}_nC_35^{\frac{n}{2}-2} + {}_nC_15^{\frac{n}{2}-1}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left({}_nC_1\left(5^0 + 5^{\frac{n}{2}-1}\right) + {}_nC_3\left(5^1 + 5^{\frac{n}{2}-2}\right) + \cdots + {}_nC_M\left(5^{\frac{n}{4}-1} + 5^{\frac{n}{4}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}} {}_nC_{2k-1}\left(5^{k-1} + 5^{\frac{n}{2}-k}\right)\right\}
\end{aligned}$$

n≡1(mod4)の時

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{2^{n-1}}\left({}_nC_15^0 + {}_nC_35^1 + \cdots + {}_nC_M5^{\frac{n-1}{4}-1} + {}_nC_{M+1}5^{\frac{n-1}{4}} + \cdots + {}_nC_25^{\frac{n}{2}-1} + {}_nC_05^{\frac{n-1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{5^{\frac{n-1}{2}} + \left({}_nC_15^0 + {}_nC_25^{\frac{n-1}{2}-1}\right) + \left({}_nC_35^1 + {}_nC_45^{\frac{n-1}{2}-2}\right) + \cdots + \left({}_nC_M5^{\frac{n-1}{4}-1} + {}_nC_{M+1}5^{\frac{n-1}{4}}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{5^{\frac{n-1}{2}} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{4}}\left({}_nC_{2k-1}5^{k-1} + {}_nC_{2k}5^{\frac{n-1}{2}-k}\right)\right\}
\end{aligned}$$

n≡2(mod4)の時

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{2^{n-1}}\left({}_nC_15^0 + {}_nC_35^1 + \cdots + {}_nC_M5^{\frac{n-2}{4}} + \cdots + {}_nC_35^{\frac{n}{2}-2} + {}_nC_15^{\frac{n}{2}-1}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{{}_nC_1\left(5^0 + 5^{\frac{n}{2}-1}\right) + {}_nC_3\left(5^1 + 5^{\frac{n}{2}-2}\right) + \cdots + {}_nC_{M-2}\left(5^{\frac{n-2}{4}-1} + 5^{\frac{n-2}{4}+1}\right) + {}_nC_M5^{\frac{n-2}{4}}\right\} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{{}_nC_{\frac{n}{2}}5^{\frac{n-2}{4}} + \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{4}} {}_nC_{2k-1}\left(5^{k-1} + 5^{\frac{n}{2}-k}\right)\right\}
\end{aligned}$$

n≡3(mod4)の時

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{2^{n-1}}\left({}_nC_15^0 + {}_nC_35^1 + \cdots + {}_nC_M5^{\frac{n-3}{4}} + {}_nC_{M-1}5^{\frac{n-3}{4}+1} + \cdots + {}_nC_25^{\frac{n-3}{2}} + {}_nC_05^{\frac{n-3}{2}+1}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{n + 5^{\frac{n-1}{2}} + \left({}_nC_25^{\frac{n-3}{2}} + {}_nC_35^1\right) + \left({}_nC_45^{\frac{n-3}{2}-1} + {}_nC_55^2\right) + \cdots + \left({}_nC_{M-1}5^{\frac{n-3}{4}+1} + {}_nC_M5^{\frac{n-3}{4}}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{n + 5^{\frac{n-1}{2}} + \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{4}}\left({}_nC_{2k}5^{\frac{n-1}{2}-k} + {}_nC_{2k+1}5^k\right)\right\}
\end{aligned}$$

３．結論

無理数で構成されたビネの公式を、二項展開を用いて有理数のみで表すことができた。また、コンビネーションの多項式として扱うことで、より無駄のない計算ができる公式を作ることができた。

４．参考文献　なし