フィボナッチ数列　　１年Ｆ組　川口幸大

＜動機＞

自然界ではアンモナイト、美術ではモナリザやミロのヴィーナス、建築物ではパルテノン神殿やピラミッドなど多様な場所で見られる「フィボナッチ数列」には自分が知るもの以上に興味深い特徴があるのではないかと思い、この研究を始めた。

また、フィボナッチ数列の総和は-１だと言われることがあるが、これを求めるためには、母関数という関数を使う必要があるが、母関数の導出には高度な計算が必要になるので、より簡単に導きたいと思った。

＜紹介＞

フィボナッチ数列とは硬い言葉でいうと、**「漸化式：$\boldsymbol{a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}}$で定義される数列」**である。これを言い換えると、「初項１，第２項が１でありそれ以降の項は直前の２つの項の和で表される数列」である。(初項を０、第２項を１とすることもある)

第１項から第１０項までは以下のようになる

１　１　２　３　５　８　１３　２１　３４　５５

この数列には非常に多くの特徴があり数多くの数学者によって研究されている。

＜一般項の導出＞

Proof

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$（$a_1 = a_2 = 1$）　この隣接３項間漸化式を特性方程式$x^2 = x + 1$の２解$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \boldsymbol{\beta} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$を用いて表す。$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \cdots ① \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \cdots ② \end{cases}$

①　・②の初項について

$a_2 - \alpha a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$　より、$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^n \cdots ③$

（$a_{n+1} - \alpha a_n$は公比βの等差数列）

$a_2 - \beta a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$　より、$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^n \cdots ④$

（$a_{n+1} - \beta a_n$は公比αの等差数列）

③－④より、$-\alpha a_n + \beta a_n = \beta^n - \alpha^n$

$$a_n(\alpha - \beta) = \alpha^n - \beta^n$$

α、βに各値を代入することでフィボナッチ数列の一般項（ビネの公式）を得る。

$\boxed{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$　Q.E.D.

＜母関数＞

このフィボナッチ数列の特徴を求めるにあたって、「**母関数（ぼかんすう）**」を求める。母の字が用いられている理由として、この関数を調べることで数列の特徴を知ることができるため、まるでその数列の生みの親のように考えられるからだと言われる。

母関数の定義：$\{a_n\}$において、$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}$と表される関数

さて、フィボナッチ数列の母関数を求めるには

・二項定理　　・部分分数分解

・微分　　　　・テイラー展開

などと非常に難解な内容の計算を行わなければならない。そこで、よりわかりやすくフィボナッチ数列の母関数を求めるために以下の方法を考案した。

一般項の証明と同様に$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$を定める

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\beta}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}[1 + \alpha x + (\alpha x)^2 + \cdots (\alpha x)^n - \{1 + \beta x + (\beta x)^2 + \cdots (\beta x)^n\}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\{(\alpha - \beta)x + (\alpha^2 - \beta^2)x^2 + \ \ldots\}$$

上式は、$\frac{x}{1-x-x^2}$　に等しいので、

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\{(\alpha - \beta)x + (\alpha^2 - \beta^2)x^2 + \ \ldots\}$$

両辺を x で割って、$\boxed{F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}}$の一般に知られているフィボナッチ数列の母関数を得る。

＜今後の展望＞

母関数を求めるのに無限等比級数（数Ⅲ範囲）をもちいたが、単純な形のもののため比較的理解しやすいものだと思う。今後は母関数を用いてフィボナッチ数列の総和が－１となることについて研究したい。

参考文献：https://www.learninginnovation.go.jp/db/ed0163/