絶対値の中に絶対値をいれた式

戸山高校 1 年 B 組　丹野和哉

以下変数は実数とする。

目的

目的を説明するにあたり、まず独自の概念を定義する。
絶対値を含む式を文字列のように扱い、**深さ**という概念を考える。式 A の深さを以下のように定義する ：

- A が数または実変数であれば、A の深さは 0
- A が式 B を用いて $|B|$ と表せるとき、（A の深さ） = （B の深さ）+1
- A が 1 つ以上の式$B_0, B_1, B_2, \ldots$と任意の関数 F を用いて F$(B_0, B_1, B_2, \ldots)$ と表せるとき、A の深さは$B_0, B_1, B_2, \ldots$の深さの内の最大値。 （二項演算は二変数関数とする。絶対値関数は除くものとする。）

要するに深さとは、式の中で最も絶対値に入れられた部分はどれくらいかという数字である、例えば$\left||x| - |y| + xy\right|$の深さは 2 である。
この研究は、深さが大きい式ついて、それと常に等しい式でありながら、より深さの小さいものを探すことを目的とする。

一変数に加減, 定数倍, 絶対値関数を複数回適用してできる式

例えば$\frac{1}{2}||x| - x|$のような式のことである。このような式を A とすると、A は全て**この範囲で深さを 1 以下に変形できる。**
具体的には、式 A の変数を x とし、式 A が x で場合分けして

$a_1 x + b_1 \ if \ x < c_1$
$a_2 x + b_2 \ if \ c_1 \le x < c_2$
$a_3 x + b_3 \ if \ c_2 \le x < c_3$
……
$a_n x + b_n \ if \ c_{n-1} \le x$

（n は正整数、いかなる正整数 l, m(≦n)に対してもa_m, b_m, c_mは整数、l<m ならば$c_l < c_m$）
のように表せるとすると、

$$A = a_1 x + b_1 + \frac{(a_2 - a_1)(|x - c_1| + x - c_1) + (a_3 - a_2)(|x - c_2| + x - c_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})(|x - c_{n-1}| + x - c_{n-1})}{2}$$

が成立する。直感的に言えば、式のグラフを描いてみて、の形のグラフを何度も足したり引いたりすれば良い。
以下に式変形の例を記す。a, b は実数の定数を想定している。

<table>
<tr><th>深さが大きい式</th><th>同じ値の式</th><th>定数の制限</th></tr>
<tr><td>$||x|-a|$</td><td>$|x+a|+|x-a|-|x|-a$</td><td>0≦a</td></tr>
<tr><td>$|||x|-a|-b|$</td><td>$|x+a+b|-|x+a|+|x+a-b|-|x|+|x-a+b|-|x-a|+|x-a-b|-a-b$</td><td>0≦b≦a</td></tr>
<tr><td>$||x|+x|$</td><td>$|x|+x$</td><td></td></tr>
<tr><td>$||x|+x-a|$</td><td>$|2x-a|-|x|+x$</td><td>0≦a</td></tr>
<tr><td>$||x+a|+|x-a|-|x|-b|$</td><td>$|x+b|+|x-b|-|x+a|-|x-a|+|x+2a-b|+|x-2a+b|-|x|-b$</td><td>a≦b≦2a</td></tr>
<tr><td>$||x+1|+|x|+|2x+1|-3x-3|$</td><td>$|x+1|-|x|-|2x+1|+|5x+3|+|x-1|-3x-3$</td><td></td></tr>
</table>

多変数に加減, 定数倍，絶対値関数を複数回適用してできる式

予想としては、式 A に変数が n 個であるとき、式 A は**この範囲で深さを n 以下に変形できると考える。**しかし証明をしていない。
以下に式変形の例を記す。

<table>
<tr><th>深さが大きい式</th><th>同じ値の式</th><th>深さの変化</th></tr>
<tr><td>$||x|-|y||$</td><td>$|x+y|+|x-y|-|x|-|y|$</td><td>2 → 1</td></tr>
<tr><td>$||x+y+|x||-x|$</td><td>$\dfrac{\left||x+y|+x-y\right| - \left||3x+y|+x+y\right| + |3x+y| + |x+y|}{2} + y$</td><td>3 → 2</td></tr>
<tr><td>$|x+|x|+|x+2|y||+3|y||-|x+2|y||$</td><td>$|x|+x+3|y|$</td><td>3 → 1</td></tr>
<tr><td>$||x|+|y|+z|$</td><td>$|x+|x|+|x+2z|+|y|+3z|-|x+2z|-x-2z$</td><td>2 → 2 同じ深さでも形は違い得る。</td></tr>
</table>

多変数に加減，乗算，絶対値関数を複数回適用してできる式

例を記す。二番目の式から、さらに除法を許した式の範囲において$\left||x| + y\right|$の深さを 1 にできることは注目すべきである。

<table>
<tr><th>深さが大きい式</th><th>同じ値の式</th></tr>
<tr><td>$||x| + xy|$</td><td>$\dfrac{|y+1|(x+|x|) - |y-1|(x-|x|)}{2}$</td></tr>
<tr><td>$x||x| + y|$</td><td>$\dfrac{|x+y|(x+|x|) + |x-y|(x-|x|)}{2}$</td></tr>
<tr><td>$x|x+1| + x|x-1| - 2|x|x - |x^2 - x| + |x^2 + x|$</td><td>$2x$</td></tr>
</table>

その他の式

- 式に根号を許した場合、$\sqrt{x^2}$ = $|x|$であるから全ての式の深さを 0 にできる。符号関数も$x\,sign(x) = |x|$であるから同様である。
- $\left||x| - cosx - 1\right| = |x + cosx + 1| + |x - cosx - 1| - |x| - cosx - 1$のように、関数の値域に着目すると上記の変形が使える場合がある。
- max 関数は本研究と近いと思われる。$\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$, $|x| = \max(-x, x)$と相互に変換可能であり、本研究の計算の確認もできる。
- 三変数以上に関する max 関数を絶対値に直すには、max(x, y, z)=max(x, max(y, z))を経由すれば良い。